Kapitel 10
Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Satz 10.8 *Es sei B ein einfacher Bereich (in $\mathbb{R}^3$), $B \subseteq D := [a_1, b_1] \times \cdots [a_3, b_3]$, und $f(x, y, z)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist $f^\star$ in D integrierbar, und es ist* **10/2/15**

$$\iiint\limits_D f^\star(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{a_1}^{b_1} \Big(\int\limits_{a_2}^{b_2} \Big(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \Big) dy \Big) dx.$$

Beweisidee. Den Beweis führt man analog zum Satz 10.4. Aufgrund von Satz 10.7 genügt folgendes zu zeigen: **10/2/16**

1. $f^\star$ ist in D integrierbar.
2. Für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ ist $f^\star(x, y, z)$ (als Funktion von x und y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar.
3. $F(x) := \iint\limits_{D'} f^\star(x, y, z)\, dydz$ ist (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar.

Diese Behauptungen zeigt man durch ähnliche Überlegungen wie beim Beweis von Satz 10.3. ❏