

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.2 Dreifachintegrale

**Satz 10.9** (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/2/19

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich (in  $\mathbb{R}^3$ ) und  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  seien wie oben definiert. Ist  $f(x, y, z)$  in  $B$  stetig, dann ist  $f$  in  $B$  integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

**Beweis.** Den Beweis führt man analog wie im zweidimensionalen Fall, wir werden die Beweisidee skizzieren. 10/2/20

Nach dem Korollar zu Satz Satz 10.7 ist

$$\iiint_B f(\bar{x}) \, d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Aufgrund der Definition von  $f^*$  in  $D$  gilt für jedes fixierte  $z \in [a_3, b_3]$ :

$$\begin{aligned} a_3 \leq z < \varphi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = 0, \\ \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ \psi_2 < z \leq b_3 &\implies f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) \, dz &= \int_{a_3}^{\varphi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} \, dz + \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f^*(\bar{x}) \, dz + \int_{\psi_2(x,y)}^{b_3} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} \, dz \\ &= \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} \, dz := G^*(x, y). \end{aligned}$$

Analog erhält man für jedes feste  $y \in [a_2, b_2]$ :

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f^*(\bar{x}) \, dz \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} G^*(x, y) \, dy \\ &= \int_{a_2}^{\varphi_1(x)} G^*(x, y) \, dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) \, dy + \int_{\psi_1(x)}^{b_2} G^*(x, y) \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy \\
&= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x}) dz}_{= f(\bar{x})} \right) dy.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx. \quad \square
\end{aligned}$$