

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

In diesem Abschnitt wird die Grundidee, die bei der Definition des Riemann-Integrals für Funktionen mit einer Veränderlichen benutzt wurde, auf reellwertige Funktionen mit mehreren Veränderlichen übertragen. Da hier nur ein Ausblick gegeben werden soll, können auch nur grundlegende Methoden und Techniken angesprochen werden, auf Beweise wird weitgehend verzichtet.

Wir beginnen zunächst mit Funktionen zweier Veränderlicher.

10.1 Doppelintegrale

In folgenden seien stets (wenn nichts anderes vereinbart wird) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b, c \leq d$, $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ seien abgeschlossene Intervalle in \mathbb{R} , und D bezeichne das Rechteck in \mathbb{R}^2 , das durch $D := I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ gegeben ist. Weiterhin sei $f(x, y)$ eine in D definierte und beschränkte Funktion. Abkürzend schreiben wir für (x, y) auch \bar{x} .

Die Definition des bestimmten Riemann-Integrals (Abschnitt 9.2) wurde bekanntlich durch das Flächenproblem motiviert. Die analoge Fragestellung wird Motiv für sog. Doppelintegrale sein. Hierzu setzen wir zunächst $f(\bar{x}) \geq 0$ in D voraus (diese Bedingung wird nur für die Motivation benutzt; für die Definition von Mehrfachintegralen spielt sie keine Rolle).

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

Kann der räumlichen Punktmenge

$$M := \{(x, y, z) : x \in I, y \in J, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zugeschrieben werden?

Wie könnte man dieses Volumen gegebenenfalls berechnen?

Bei der Behandlung dieser Fragen geht man völlig analog wie im eindimensionalen Fall vor. Man zerlegt zunächst das Rechteck D in Teilrechtecke. Dies geschieht wie folgt:

$\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$ seien Zerlegungen der Intervalle I bzw. J , also $a = a_0 < \dots < a_{n+1} = b$ und $c = c_0 < \dots < c_{m+1} = d$ (vgl. Abb. 10.1).

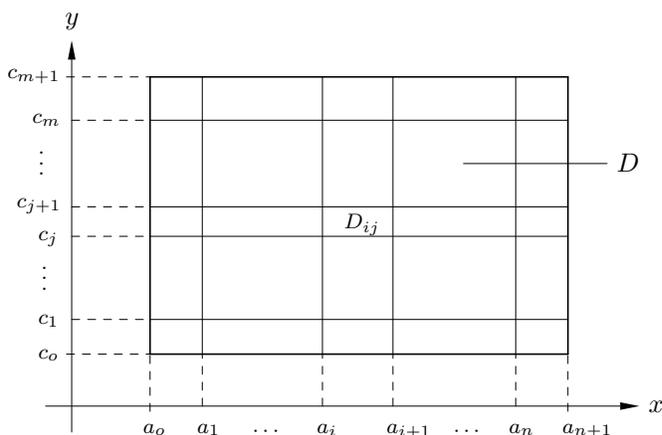


Abb. 10.1 Mit Hilfe der Zerlegungen (a_0, \dots, a_{n+1}) von $[a, b]$ und (c_0, \dots, c_{m+1}) von $[c, d]$ wird das Rechteck $D = [a, b] \times [c, d]$ in die Teilrechtecke $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ zerlegt.

Wie auch früher benutzen wir die Bezeichnungen $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ und $J_j := [c_j, c_{j+1}]$. Weiterhin sei $D_{ij} := I_i \times J_j = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Offenbar ist $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$.

$\bar{\mathfrak{z}} := \{D_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ heißt dann *Zerlegung* (oder *Partition*) von D . Eine *Verfeinerung* von $\bar{\mathfrak{z}}$ ist durch Verfeinerungen von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 gegeben.

Nach Voraussetzung ist f in D beschränkt, folglich ist f auch in jedem Teilrechteck D_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, beschränkt. Daher existieren

$$h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

Bemerkung. Im folgenden bezeichnen D und D_{ij} sowohl die Rechtecke $I \times J$ bzw. $I_i \times J_j$ als auch den Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da sich die aktuelle Bedeutung jeweils aus dem Zusammenhang ergibt.

Über den Rechtecken D_{ij} errichten wir jetzt Quader mit der Grundfläche D_{ij} und der Höhe h_{ij} bzw. H_{ij} (vgl. Abb. 10.2). Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

10/1/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot h_{ij}.$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot H_{ij}.$$

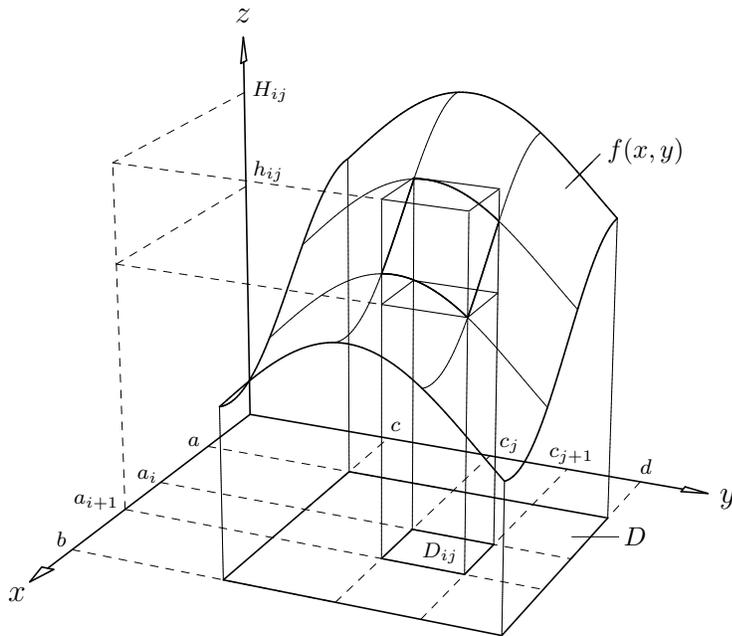


Abb. 10.2 D sei wie in Abb. 10.1 zerlegt. Über den Teilrechtecken D_{ij} werden jeweils Quader mit den Höhen $h_{ij} := \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ bzw. $H_{ij} := \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ errichtet. Offenbar ist stets $h_{ij} \leq H_{ij}$. Bildet man die Summe der Volumina der Quader mit den jeweiligen Höhen h_{ij} bzw. H_{ij} , dann erhält man die Untersumme bzw. die Obersumme von f bei der entsprechenden Zerlegung.

Völlig analog wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen gilt der folgende Satz 10/1/2
(vgl. Satz 9.5).

Satz 10.1 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige 10/1/3
Zerlegungen von D . Dann gilt:*

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.
- (3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Beweis. Den Beweis führt man völlig analog wie zu Satz 9.5. □ 10/1/4

Aus Satz 10.1 (2) folgt sofort, daß die Menge aller Untersummen nach oben und die 10/1/5
Menge aller Obersummen nach unten beschränkt ist. Folglich existieren

$$\iint_D f(x,y) dx dy \stackrel{\text{Df}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D),$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy \stackrel{\text{Df}}{=} \inf \{ \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Aus (4) erhält man unmittelbar, daß stets $\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy$ gilt.

Analog wie im eindimensionalen Fall definieren wir jetzt das *Doppelintegral*.

Definition. (*Integral über Rechteckbereichen*)

10/1/6

Sei f in D definiert und beschränkt.

f ist in D integrierbar

$$\overline{\int}_D f(x, y) \, dx dy = \underline{\int}_D f(x, y) \, dx dy.$$

Der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt dann *Riemann-Integral* oder *Doppelintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.: } \iint_D f(x, y) \, dx dy := \int_D f(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$

Definition. (*Volumen*)

10/1/7

Sei f in $D := [a, b] \times [c, d]$ definiert und beschränkt und nicht negativ.

Die (räumliche) Punktmenge $M = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ besitzt ein *Volumen* (*Rauminhalt*) der Größe V

$$\overline{\int}_D f \text{ ist in } D \text{ integrierbar und } V = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

10/1/8

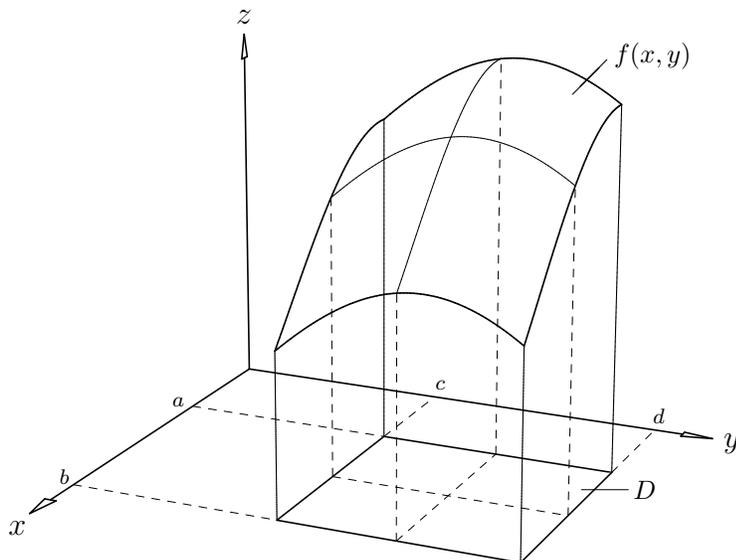


Abb. 10.3 Die Abbildung veranschaulicht das Volumen der Punktmenge M , die von unten und oben durch das Rechteck R bzw. durch die Funktion $f(x, y)$ beschränkt ist. Die seitlichen Begrenzungen von M sind durch die senkrechten Ebenen gegeben, welche auf den Begrenzungslinien des Rechtecks D errichtet sind.

Beispiel für eine Funktion, die in $D = [a, b] \times [c, d]$ definiert und beschränkt aber nicht integrierbar ist. Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ eine Zerlegung von D , dann existieren offenbar in jedem D_{ij} Elemente $(x_1, y), (x_2, y)$ mit $x_1 \in D \cap \mathbb{Q}$ und $x_2 \notin \mathbb{Q}$.

Folglich ist stets

$$\inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = 1.$$

Daraus erhält man sofort

$$S_f(\bar{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot \underbrace{h_{ij}}_{=0} = 0$$

und

$$\bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot \underbrace{H_{ij}}_{=1} = D \neq 0.$$

Folglich ist

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y) \, dx dy = 0 < D = \iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

und damit ist f in D nicht integrierbar.

Bemerkung. Völlig analog wie im eindimensionalen Fall gelten auch hier

10/1/10

(1) die Sätze über Zwischensummen

(ein Zwischenstellensystem $\bar{\tau}$ bei einer Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ ist gegeben durch $\bar{\tau} = \{\bar{\xi}_{ij} \in D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$, wobei $\bar{\xi}_{ij}$ beliebig in D_{ij} zu wählen ist und die entsprechende Zwischensumme durch $S_f(\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\tau})$ definiert ist),

(2) das Riemannsches Integrierbarkeitskriterium,

(3) stetige Funktionen sind integrierbar,

(4) beschränkte Funktionen mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen sind integrierbar.

Die Beweise verlaufen ähnlich wie für Funktionen mit einer Veränderlichen.

Weiterhin gilt:

Satz 10.2 Ist f in D integrierbar und sind h, H reelle Zahlen mit $h \leq f(x, y) \leq H$

10/1/11

für jedes $(x, y) \in D$, dann ist $h \cdot D \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq H \cdot D$.

Beweis. Den Beweis führt man wie im eindimensionalen Fall. \square

10/1/12

Satz 10.3 (iterierte Integrale über Rechteckbereichen)

10/1/13

Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und f in D integrierbar. Ist $f(x, y)$ für jedes fixierte $x \in [a, b]$ als Funktion von y in $[c, d]$ integrierbar und ist $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$ in $[a, b]$

integrierbar, dann ist $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$, $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$ Zerlegungen von $[a, b]$ bzw. 10/1/14 von $[c, d]$, und es sei $\mathfrak{z} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$, wobei $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Dann gilt

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy,$$

und somit

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Für $h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$ und $H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$ gilt stets

$$h_{ij} \leq f(\bar{x}) \leq H_{ij} \quad \text{für alle } \bar{x} = (x, y) \in D.$$

Ist $x \in [a, b]$, dann erhält man sofort

$$h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) \leq \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \leq H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j).$$

Integriert man die letzte Ungleichung nach x , so ergibt sich

$$\begin{aligned} h_{ij} \cdot D_{ij} &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) dx \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx \\ &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) dx \leq H_{ij} \cdot D_{ij}. \end{aligned}$$

Summiert man diese Ungleichungen nach i und j , so erhält man

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

Da f in D integrierbar ist, unterscheiden sich Ober- und Untersumme bei einer geeigneten Zerlegung nur um beliebig wenig.

Da nach Definition des Doppelintegrals stets $\underline{S}_f(\bar{z}) \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \overline{S}_f(\bar{z})$ ist, gilt schließlich

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \quad \square$$

Bemerkung. Der Satz gilt auch dann, wenn die Bedingungen für x und y entsprechend vertauscht sind. 10/1/15

Korollar. Ist $f(x, y)$ in D stetig (also auch integrierbar), dann ist 10/1/16

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beweis. Die Behauptung folgt wie im vorhergehenden Beweis sofort aus dem Fakt, daß stetige Funktionen integrierbar sind. 10/1/17 \square

Beispiel. 10/1/18

Sei $f(x, y) = x^2 + 2xy$ und $[a, b] = [0, 1]$, $[c, d] = [1, 3]$, also $D = [0, 1] \times [1, 3]$. Dann gilt (falls zuerst nach y und anschließend nach x integriert wird):

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_1^3 (x^2 + 2xy) \, dy \right) dx = \int_0^1 [x^2 y + xy^2]_1^3 dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 9x - x^2 - x) \, dx = \int_0^1 (2x^2 + 8x) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Wir berechnen dasselbe Integral noch einmal (wobei jetzt zuerst nach x und anschließend nach y integriert wird).

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\int_0^1 (x^2 + 2xy) \, dx \right) dy &= \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + x^2 y \right]_0^1 dy = \int_1^3 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 1 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Beide Methoden liefern also das gleiche Ergebnis.

Definition. (*einfacher Bereich*)

Es seien $[a, b], [c, d]$ Intervalle in \mathbb{R} .

1. B ist ein *x-einfacher Bereich* (über $[a, b]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ, ψ sind stetig in $[a, b]$,
 - (b) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in [a, b]$,
 - (c) $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Abb. 10.4).
2. B_1 ist ein *y-einfacher Bereich* (über $[c, d]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ_1, ψ_1 sind stetig in $[c, d]$,
 - (b) $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$ für jedes $y \in [c, d]$,
 - (c) $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ (vgl. Abb. 10.5).
3. B ist ein *einfacher Bereich*
 $\overline{\text{Df}}$ B ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

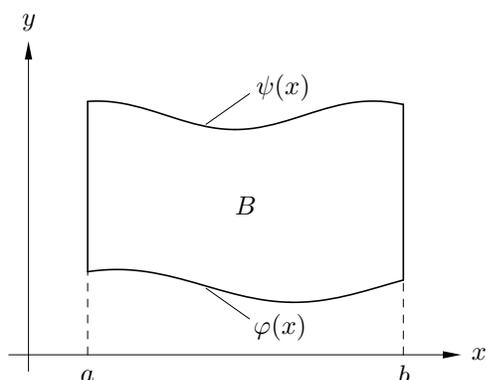


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x-einfachen* Bereich B .

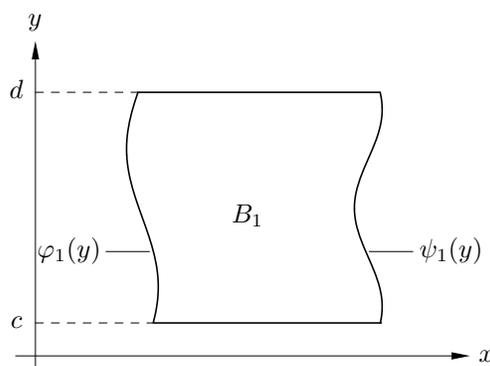


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y-einfachen* Bereich B_1 .

Bisher ist das Integral nur über Rechteckbereichen $D = [a, b] \times [c, d]$ definiert. Wir werden die Definition jetzt auf einfache Bereiche erweitern. Dazu sei zunächst B ein *x-einfacher* Bereich (für *y-einfache* Bereiche erfolgt die Definition analog), und $f(x, y)$ sei eine in B definierte und stetige Funktion. 10/1/21

B sei mit Hilfe der in $[a, b]$ stetigen Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ gegeben, und D sei so gewählt, daß $B \subseteq D$, also $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq d\}$.

Durch den folgenden „Kunstgriff“ wird der Definitionsbereich von f auf D erweitert (vgl. Abb. 10.6).

$$f^*(x, y) \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{für } (x, y) \in D \setminus B. \end{cases}$$

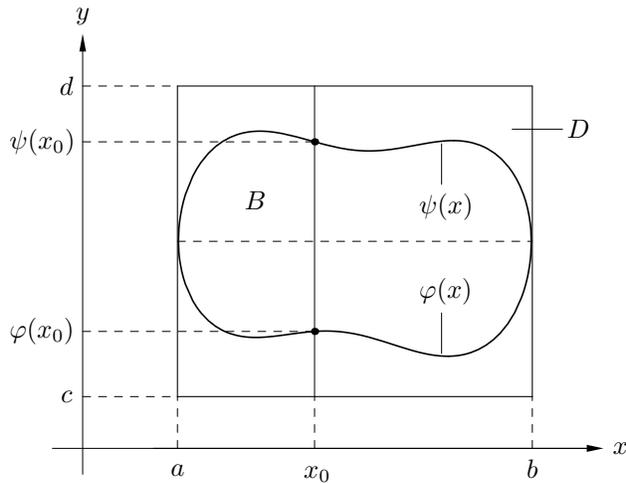


Abb. 10.6 In dieser Abbildung wird ein x -einfacher Bereich B dargestellt, der in einem Rechteck D eingeschlossen ist. Auf B ist eine Funktion $f(x, y)$ definiert, die auf D zu $f^*(x, y)$ erweitert wird. Fixiert man ein $x_0 \in [a, b]$, dann gilt entsprechend der Definition von ψ und φ stets: $f^*(x_0, y) = 0$, falls $c \leq y < \varphi(x_0)$ oder $\psi(x_0) < y \leq d$ und $f^*(x_0, y) = f(x_0, y)$, anderenfalls.

Man überlegt sich leicht, daß B kompakt ist, denn B ist offensichtlich beschränkt, und der Rand von B gehört zu B . Nach Voraussetzung ist f in B stetig, also auch beschränkt. Folglich ist f^* in D definiert und beschränkt, aber dort nicht mehr unbedingt stetig.

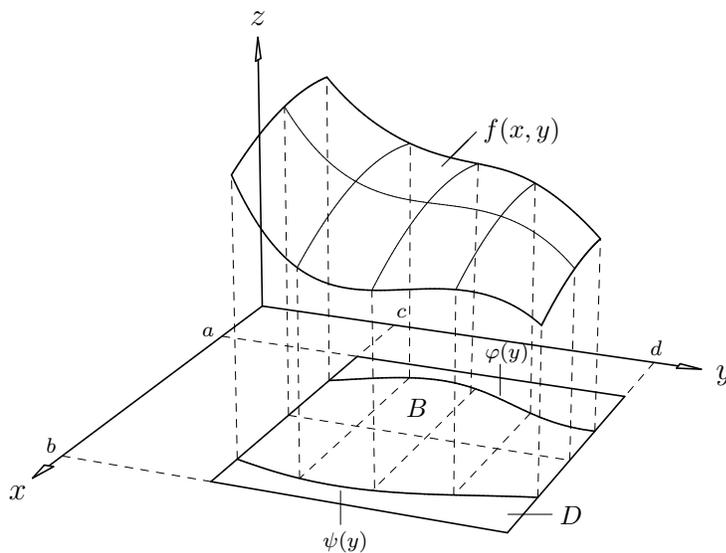


Abb. 10.7 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y)$, die zunächst nur in dem y -einfachen Bereich B definiert ist. Mittels der obigen Definition von f^* wird $f(x, y)$ „trivial“ auf den Rechteckbereich D zu $f^*(x, y)$ erweitert.

Satz 10.4 *Es sei B ein über $[a, b]$ x -einfacher bzw. über $[c, d]$ y -einfacher Bereich, $B \subseteq D := [a, b] \times [c, d]$, und $f(x, y)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D integrierbar, und es ist*

$$\iint_D f^*(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\iint_D f^*(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f^*(x, y) dx \right) dy.$$

Beweisidee. Wir betrachten den Fall, daß B ein x -einfacher Bereich ist, den verbleibenden Fall beweist man analog. 10/1/23

Aufgrund von Satz 10.3 genügt folgendes zu zeigen:

1. f^* ist in D integrierbar,
2. Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist $f^*(x, y)$ (als Funktion von y) in $[c, d]$ integrierbar, und
3. $F(x) := \int_c^d f^*(x, y) dy$ ist (als Funktion von x) in $[a, b]$ integrierbar.

Behauptung 1 kann mit Hilfe des Riemannsches Integrierbarkeitskriteriums nachgewiesen werden. Der Beweis ist jedoch etwas langwierig, daher wird er hier weggelassen.

2. Für jedes fixierte $x_0 \in [a, b]$ ist $f^*(x_0, y)$ in $[c, d]$ definiert und beschränkt und in $[c, d] \setminus \{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$ stetig (als Funktion der Veränderlichen y , vgl. Abb. 10.6). Folglich ist $f^*(x_0, y)$ in $[c, d]$ integrierbar.

3. Für die Integrierbarkeit von $F(x)$ genügt es, die Stetigkeit von $F(x)$ in $[a, b]$ nachzuweisen.

Dazu sei $x_0 \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in [a, b]$ gilt: Wenn $|x - x_0| < \delta$, so $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$.

Offenbar ist f^* in $D := [a, b] \times [c, d]$ beschränkt. Folglich gibt es ein $c^* \in \mathbb{R}$, so daß $|f^*(x, y)| < c^*$ für alle $(x, y) \in D$.

Nach Voraussetzung sind φ, ψ in $[a, b]$ stetig. Damit gilt:

Für jedes $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $\delta' > 0$, so daß für alle $x \in [a, b]$ gilt: wenn $|x - x_0| < \delta'$, so $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon'$ und $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon'$.

Sei o.B.d.A. $c < \varphi(x_0) < \psi(x_0) < d$ (falls $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, dann vereinfacht sich der Beweis) und ε' so klein, daß $c < \varphi(x_0) - \varepsilon' < \varphi(x_0) + \varepsilon' < \psi(x_0) - \varepsilon' < \psi(x_0) + \varepsilon' < d$.

Der Einfachheit halber setzen wir jetzt

$$c := c_0, \varphi(x_0) - \varepsilon' := c_1, \varphi(x_0) + \varepsilon' := c_2, \psi(x_0) - \varepsilon' := c_3, \psi(x_0) + \varepsilon' := c_4, d := c_5$$

(vgl. Abb. auch 10.6).

Es ist

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^d f^*(x, y) dy - \int_c^d f^*(x_0, y) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d (f^*(x, y) - f^*(x_0, y)) dy \right| \\ &\leq \int_c^d \underbrace{|f^*(x, y) - f^*(x_0, y)|}_{:= g(y)} dy \end{aligned}$$

$$= \int_{c_0}^{c_1} g(y) dy + \cdots + \int_{c_4}^{c_5} g(y) dy,$$

wobei $g(y) := |f^*(x, y) - f^*(x_0, y)|$.

Aufgrund der Definition von f^* gilt:

für $y \in [c_0, c_1]$ bzw. $y \in [c_4, c_5]$ ist $f^*(x, y) = f^*(x_0, y) = 0$,
für $y \in [c_1, c_2]$ bzw. $y \in [c_3, c_4]$ ist $g(y) \leq 2c^*$, und
für $y \in [c_2, c_3]$ ist $g(y) < \varepsilon'$, falls $|x - x_0| < \delta'$.

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \int_{c_0}^{c_1} \underbrace{g(y)}_{=0} dy + \int_{c_1}^{c_2} \underbrace{g(y)}_{< 2c^*} dy + \int_{c_2}^{c_3} \underbrace{g(y)}_{< \varepsilon'} dy + \int_{c_3}^{c_4} \underbrace{g(y)}_{< 2c^*} dy + \int_{c_4}^{c_5} \underbrace{g(y)}_{=0} dy \\ &< 2c^* \underbrace{(c_2 - c_1)}_{=\varepsilon'} + \varepsilon'(c_3 - c_2) + 2c^* \underbrace{(c_4 - c_3)}_{=\varepsilon'} \\ &= \varepsilon' \underbrace{(4c^* + c_3 - c_2)}_{:=c^{**}} = \varepsilon' c^{**} < \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{c^{**}}$ und $|x - x_0| < \delta' := \delta$.

Folglich ist $F(x)$ in $[a, b]$ stetig. \square

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich das Doppelintegral über einfache Bereiche wie folgt definieren.

Definition. (*Integral über einfachen Bereichen*)

10/1/24

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein entsprechender Rechteckbereich, so daß $B \subseteq D$. $f(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\overline{\text{Df}}$ f^* ist in D integrierbar, und

$$\iint_B f(x, y) dx dy \overline{\text{Df}} \iint_D f^*(x, y) dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) dx dy$ heißt dann *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) über B .

Bemerkung. Die obige Definition des Integrals über einfachen Bereichen erfaßt nur einen Spezialfall, gewöhnlich wird das Integral allgemeiner definiert, worauf wir hier allerdings verzichten. 10/1/25

Ist $f(x, y)$ in dem einfachen Bereich B stetig und nicht negativ, dann wird der räumlichen Punktmenge $M = \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y, z)\}$ durch

$$V := \iint_B f(x, y) \, dx dy \quad \text{ein Volumen zugeordnet (siehe Abb. 10.7).}$$

Satz 10.5 (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/1/26

(1) Es sei $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ ein x -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx .$$

(2) Es sei $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ ein y -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B_1 stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B_1 integrierbar und

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Beweis. (1). Es sei $D := [a, b] \times [c, d]$, $B \subseteq D$ und

10/1/27

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } c \leq y < \varphi(x), \\ f(x, y), & \text{für } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ 0, & \text{für } \psi(x) < y \leq d. \end{cases}$$

Für jedes fixierte $x \in [a, b]$ gilt dann

$$\int_a^b f^*(x, y) \, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x, y) \, dy.$$

Daraus erhält man (mit Hilfe von Satz 10.4)

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \iint_D f^*(x, y) \, dx dy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

(2) wird analog bewiesen. \square

Beispiele.

1. Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h (siehe Abb. 10.8).

10/1/28/1

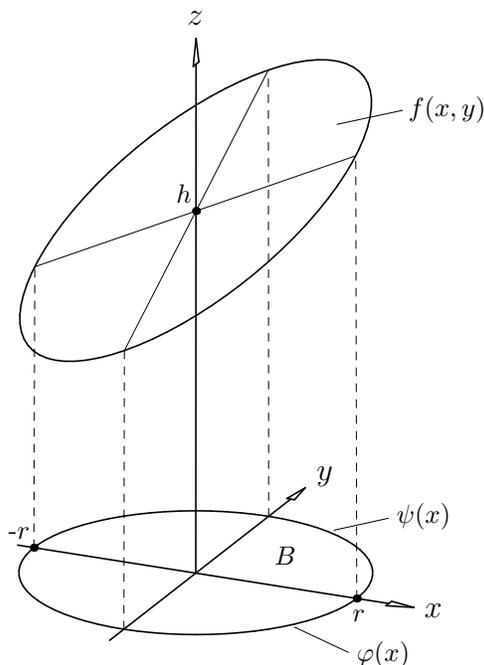


Abb. 10.8 Die Abbildung zeigt einen schräg abgeschnittenen geraden Kreiszyinder mit dem Radius r und der „Höhe“ h , wobei die Höhe in dem Mittelpunkt der Grundfläche zu betrachten ist.

Der obere schräge Schnitt mit dem Kreiszyinder wird durch die Funktion $f(x, y) = h + x + y$ erzeugt, die bekanntlich eine Ebene im \mathbb{R}^3 definiert.

Es ist $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und damit

$$y_1 := \psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y_2 := \varphi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

für $-r \leq x \leq r$. Also

$$B = \{(x, y) : -r \leq x \leq r \quad \text{und} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Für $f(x, y) := h + x + y$ ist f in B stetig, und somit gilt

$$\begin{aligned} V &= \iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (h + x + y) \, dy \right) dx = \int_{-r}^r \left[(h + x) \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \\ &= \int_{-r}^r 2(h + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \, dx + \frac{1}{2} \int_{-r}^r \underbrace{(\psi(x)^2 - \varphi(x)^2)}_{=0} dx \end{aligned}$$

$$= r^2 \pi h.$$

(Die Berechnung der beiden letzten Integrale bleibt als Übungsaufgabe.)

2. Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r .

10/1/28/2

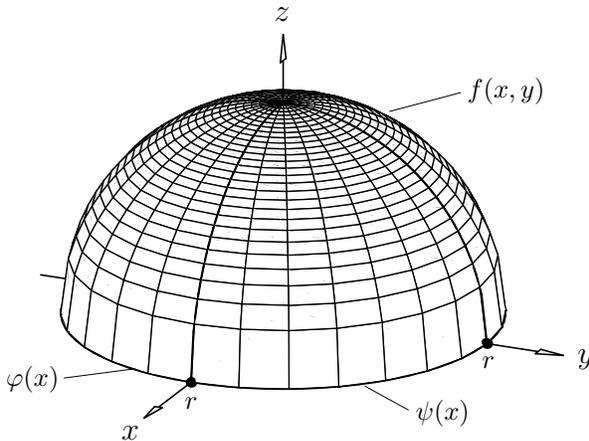


Abb. 10.9 In der Abbildung ist eine Halbkugel mit dem Radius r dargestellt. Die Grundfläche der Halbkugel entspricht dem x -einfachen Bereich B , dessen untere bzw. obere Begrenzung durch die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ gegeben sind.

Sei B wie im vorhergehenden Beispiel definiert und f durch $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ gegeben (f beschreibt den oberen Teil der Kugeloberfläche). Offenbar ist f in B stetig, folglich gilt:

$$\begin{aligned} V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dy \right) dx = \frac{2}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

(Die Auswertung des letzten Integrals bleibt als Übungsaufgabe.)

Integrale über „komplizierteren“ Bereichen

10/1/29

Definition. (*Doppelintegral*)

Es seien B_1, \dots, B_k x -einfache bzw. y -einfache Bereiche, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, und es sei $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Weiterhin sei $f(x, y)$ im Inneren von jedem B_i stetig.

Dann vereinbaren wir:

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} f(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$ heißt *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

Bereiche B dieser Art könnten z.B. folgendermaßen aussehen.

10/1/30

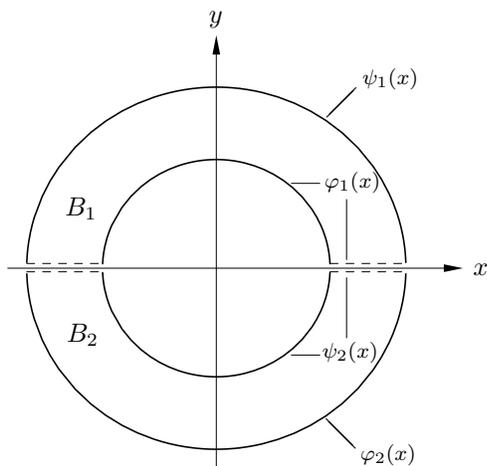


Abb. 10.10 zeigt einen Kreisring, der entlang der x -Achse aufgeschnitten wurde, so daß sich zwei x -einfache Bereiche ergeben.

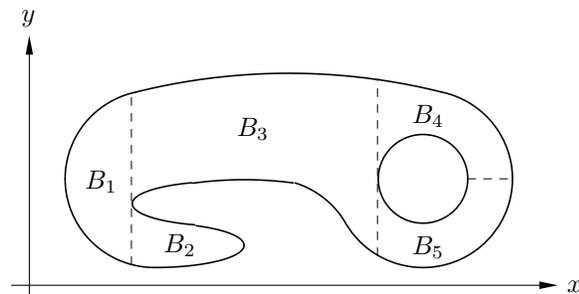


Abb. 10.11 zeigt die Zerlegung eines Bereiches in x - bzw. y -einfache Teilbereiche. B_1 ist z.B. y -einfach und B_2 x -einfach. Es sind auch andere Zerlegungen in einfache Teilbereiche möglich. In den praktischen Anwendungen erfolgt die Zerlegung jeweils so, daß die Integration am einfachsten ausführbar ist.

10.2 Dreifachintegrale

Dreifachintegrale sind völlig analog zu Doppelintegralen definiert.

10/2/0

Dazu seien $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ Intervalle in \mathbb{R} ,

D sei der Quader $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und

$f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in D definiert und beschränkt.

Eine *Zerlegung* $\bar{\mathfrak{z}}$ von D entsteht durch Zerlegungen $\bar{\mathfrak{z}}_\nu := (a_\nu^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$ von $[a_\nu, b_\nu]$, $\nu = 1, \dots, 3$. Dadurch entstehen kleinere Quader

$$D_{ijk} := [a_i^1, a_{i+1}^1] \times [a_j^2, a_{j+1}^2] \times [a_k^3, a_{k+1}^3].$$

Wegen der Beschränktheit von f in D existieren insbesondere $h_{ijk} := \inf_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$ und

$H_{ijk} := \sup_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$. Damit lassen sich wie früher *Unter-* und *Obersummen* definieren,

wobei D_{ijk} wieder für den Quader selbst und auch für dessen Rauminhalt steht.

Definition. (Untersumme, Obersumme)

10/2/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot h_{ij}.$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot H_{ij}.$$

Dies sind Summen von 4-dimensionalen Quadern mit der 3-dimensionalen „Grundfläche“ D_{ijk} und der Höhe h_{ijk} bzw. H_{ijk} . 10/2/2

Im folgenden sei D der Quader $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt analog wie im ein- und zweidimensionalen Fall der folgende Satz, der die Grundlage für die Definition des Dreifachintegrals liefert (hierbei ist D wieder als Quader und auch als dessen Rauminhalt zu verstehen).

Satz 10.6 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:* 10/2/3

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.

(3) *Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.*

(4) *Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem des Satzes 10.1 \square

10/2/4

Definition. (Unterintegral, Oberintegral)

10/2/5

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Def}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D).$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{ \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Bemerkung.

10/2/6

Der Einfachheit halber schreiben wir hierfür auch $\int_D f(\bar{x}) d\bar{x}$ bzw. $\overline{\int}_D f(\bar{x}) d\bar{x}$.

Nach Definition des Unter- und Oberintegrals gilt offenbar $\int_D f(\bar{x}) d\bar{x} \leq \overline{\int}_D f(\bar{x}) d\bar{x}$.

Definition. (Integral über Quadern)

10/2/7

Es sei D ein dreidimensionaler Quader und $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in D definiert und beschränkt.

$$f \text{ ist in } D \text{ integrierbar} \stackrel{\text{Df}}{=} \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *Riemann-Integral* oder *Dreifachintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Satz 10.7 (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar.

Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ (als Funktion von x, y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz$ (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar,

$$\text{dann ist} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man analog zu Satz 10.3 \square

10/2/9

Korollar. Ist $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D stetig, dann ist (f in D integrierbar und)

10/2/10

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus den Sätzen 10.7 und 10.3 \square

10/2/11

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

10/2/13

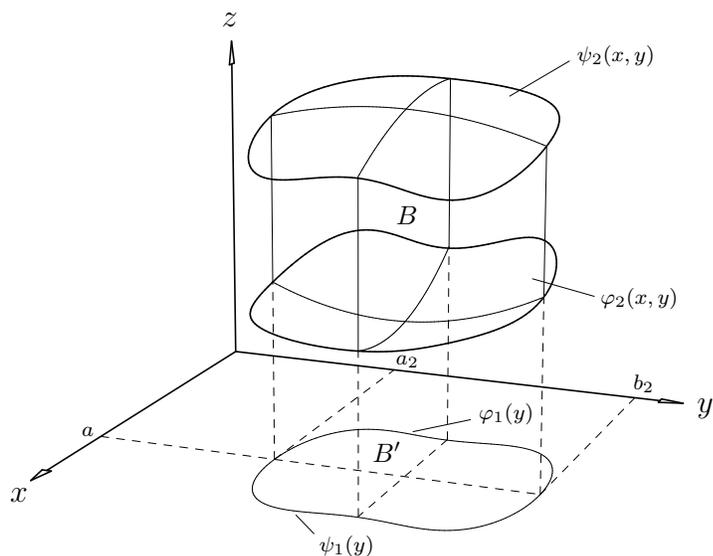


Abb. 10.12 zeigt einen dreidimensionalen einfachen Bereich B , der von oben durch $\psi_2(x, y)$ und von unten durch $\varphi_2(x, y)$ begrenzt ist. Der entsprechende y -einfache Bereich B' in der (x, y) -Ebene ist von oben bzw. von unten durch $\psi_1(y)$ bzw. durch $\varphi_1(y)$ begrenzt. B' wird in dem Intervall $[a_2, b_2]$ betrachtet.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

wenn $a_2 \leq y < \varphi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,

wenn $\varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,

wenn $\psi_1(x) < y \leq b_2$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

- wenn $a_3 \leq z < \varphi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,
wenn $\varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,
wenn $\psi_2(x, y) < z \leq b_3$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Satz 10.8 *Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3), $B \subseteq D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und $f(x, y, z)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D integrierbar, und es ist* 10/2/15

$$\iiint_D f^*(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Beweisidee. Den Beweis führt man analog zum Satz 10.4. Aufgrund von Satz 10.7 genügt folgendes zu zeigen: 10/2/16

1. f^* ist in D integrierbar.
2. Für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ ist $f^*(x, y, z)$ (als Funktion von x und y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar.
3. $F(x) := \iint_{D'} f^*(x, y, z) \, dy dz$ ist (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar.

Diese Behauptungen zeigt man durch ähnliche Überlegungen wie beim Beweis von Satz 10.3. □

Analog wie im vorhergehenden Abschnitt lassen sich jetzt Dreifachintegrale über einfachen Bereichen definieren. 10/2/17

Definition. (*Dreifachintegral über einfachen Bereichen*) 10/2/18

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein Quader, so daß $B \subseteq D$.

$f(x, y, z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\stackrel{\text{Df}}{=} f^*$ ist in D integrierbar, und

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz \stackrel{\text{Df}}{=} \iiint_D f^*(x, y, z) \, dx dy dz.$$

$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz$ heißt dann *Dreifachintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

Bemerkung. Völlig analog lassen sich auch n -fache *Integrale* definieren.

Satz 10.9 (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/2/19

Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3) und $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ seien wie oben definiert. Ist $f(x, y, z)$ in B stetig, dann ist f in B integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man analog wie im zweidimensionalen Fall, wir werden die Beweisidee skizzieren.

Nach dem Korollar zu Satz Satz 10.7 ist

$$\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx.$$

Aufgrund der Definition von f^* in D gilt für jedes fixierte $z \in [a_3, b_3]$:

$$\begin{aligned} a_3 \leq z < \varphi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = 0, \\ \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ \psi_2 < z \leq b_3 &\implies f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz &= \int_{a_3}^{\varphi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz + \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f^*(\bar{x}) dz + \int_{\psi_2(x,y)}^{b_3} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz \\ &= \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz := G^*(x, y). \end{aligned}$$

Analog erhält man für jedes feste $y \in [a_2, b_2]$:

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f^*(\bar{x}) dz \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{a_2}^{\varphi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\psi_1(x)}^{b_2} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz \right) dy. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung.

10/2/21

1. Als Volumen eines dreidimensionalen einfachen Bereiches B , der wie in den vorhergehenden Untersuchungen definiert ist, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} (\psi_2(x,y) - \varphi_2(x,y)) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \iiint_B 1 dx dy dz = \iiint_B dx dy dz. \end{aligned}$$

(Hierbei ist auf B ebenfalls eine Funktion $f(\bar{x})$ definiert, nämlich $f(\bar{x}) = 1$.)

2. Ist B abermals ein einfacher dreidimensionaler Bereich, in dem eine (physikalische) Masse verteilt ist, und gibt die in B stetige Funktion $f(\bar{x})$ die Masseverteilung an, dann liefert $\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x}$ die in B befindliche Gesamtmasse.

Beispiel.

10/2/22

In einem aufrechtstehenden Zylinder B mit dem Radius r und der Höhe h sei eine Masse verteilt, deren Dichte nur von der Niveauhöhe im Zylinder abhängt. Insbesondere sei $f(x, y, z) := h - z$ die Funktion, die die Masseverteilung angibt. (Auf der Niveauhöhe h herrscht eine Massendichte von 0 , und auf der Höhe null die Dichte h).

Es soll die Gesamtmasse in dem Zylinder berechnet werden.

B wird definiert durch den x -einfachen Bereich

$$B' := \{(x, y) : -r \leq x \leq r, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\},$$

wobei $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\psi_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Schließlich ist

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

mit $\varphi_2(x, y) = 0$ und $\psi_2(x, y) = h$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} M &= \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} (h - z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \underbrace{\left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)}}_{= \frac{h^2}{2}} dy \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \right) dx \\ &= \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = h^2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= r^2 \pi h \cdot \frac{h}{2} = \frac{r^2 \pi h^2}{2}. \end{aligned}$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 10

- Motivierung von Mehrfachintegralen, 10/3/1
- Definitionen: Zerlegung eines Rechtecks bzw. eines Quaders, Untersumme, Ober-
summe, 10/3/2
- Beziehungen zwischen Ober- und Untersummen (Satz 10.1), 10/3/3
- Definitionen: Unterintegral, Oberintegral, Integral (über Rechtecken bzw. Quadern), 10/3/4
- Definitionen: einfacher Bereich, Integrale über einfachen Bereichen, 10/3/5
- Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen. 10/3/6