Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.2 Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $\mathrm{C}(X)$ das Komplement von X bez. M. Zeigen Sie, daß für beliebige Teilmengen X, Y, $Z \subseteq M$ gilt: **12/1/2/1**

(a) $\mathrm{C}(X \cup Y) = \mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y)$,

(b) $\mathrm{C}(X \cap Y) = \mathrm{C}(X) \cup \mathrm{C}(Y)$,

(c) $\mathrm{C}(X) \setminus Y = \mathrm{C}(X \cup Y)$,

(d) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z)$.

Lösung zu Aufgabe 1.2 **12/1/2/3**

(a)
$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{C}(X \cup Y) &\iff x \in M \setminus (X \cup Y) \\
&\iff x \in M \text{ und } x \notin X \cup Y \\
&\iff x \in M \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin Y \\
&\iff x \in M \setminus X \text{ und } x \in M \setminus Y \\
&\iff x \in \mathrm{C}(X) \text{ und } x \in \mathrm{C}(Y) \\
&\iff x \in \mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y).
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{C}(X \cap Y) &\iff x \in M \setminus (X \cap Y) \\
&\iff x \in M \text{ und } x \notin X \cap Y \\
&\iff x \in M \text{ und } (x \notin X \text{ oder } x \notin Y) \\
&\iff x \in M \setminus X \text{ oder } x \in M \setminus Y \\
&\iff x \in \mathrm{C}(X) \text{ oder } x \in \mathrm{C}(Y) \\
&\iff x \in \mathrm{C}(X) \cup \mathrm{C}(Y).
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{C}(X) \setminus Y &\iff x \in \mathrm{C}(X) \text{ und } x \notin Y \\
&\iff x \in M \setminus X \text{ und } x \notin Y \\
&\iff x \in M \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin Y \\
&\iff x \in M \text{ und } x \notin X \cup Y \\
&\iff x \in M \setminus (X \cup Y) \\
&\iff x \in \mathrm{C}(X \cup Y).
\end{aligned}$$

(d) Wir zeigen zunächst $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z)$.
$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (Y \cup Z) &\iff x \in X \text{ und } x \notin Y \cup Z \\
&\iff x \in X \text{ und } x \in \mathrm{C}(Y \cup Z) \\
& \ x \in X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z).
\end{aligned}$$
Wir zeigen jetzt $X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.
$$\begin{aligned}
x \in X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) &\iff x \in X \text{ und } x \in \mathrm{C}(Y \cup Z) \\
&\iff x \in X \text{ und } x \in M \text{ und } x \notin Y \cup Z \\
&\iff x \in X \text{ und } x \notin Y \text{ und } x \notin Z \\
&\iff x \in X \setminus Y \text{ und } x \in X \setminus Z \\
&\iff x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z).
\end{aligned}$$
Es bleibt noch $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z)$ zu beweisen.

$$\begin{aligned} x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \notin Y \ \text{ und } \ x \notin Z \\ &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Y) \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Z) \\ &\iff x \in X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z). \end{aligned}$$