

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

**1.2** Es sei  $M$  eine Menge. Für  $X \subseteq M$  sei stets  $C(X)$  das Komplement von  $X$  bez.  $M$ . Zeigen Sie, daß für beliebige Teilmengen  $X, Y, Z \subseteq M$  gilt: 12/1/2/1

- (a)  $C(X \cup Y) = C(X) \cap C(Y)$ ,
- (b)  $C(X \cap Y) = C(X) \cup C(Y)$ ,
- (c)  $C(X) \setminus Y = C(X \cup Y)$ ,
- (d)  $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap C(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap C(Y) \cap C(Z)$ .

**Lösungshinweis zu Aufgabe 1.2** Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Gleichheit von Mengen und die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw, nicht. 12/1/2/2

#### Lösung zu Aufgabe 1.2

12/1/2/3

- (a)  $x \in C(X \cup Y) \iff x \in M \setminus (X \cup Y)$   
 $\iff x \in M$  und  $x \notin X \cup Y$   
 $\iff x \in M$  und  $x \notin X$  und  $x \notin Y$   
 $\iff x \in M \setminus X$  und  $x \in M \setminus Y$   
 $\iff x \in C(X)$  und  $x \in C(Y)$   
 $\iff x \in C(X) \cap C(Y)$ .
- (b)  $x \in C(X \cap Y) \iff x \in M \setminus (X \cap Y)$   
 $\iff x \in M$  und  $x \notin X \cap Y$   
 $\iff x \in M$  und ( $x \notin X$  oder  $x \notin Y$ )  
 $\iff x \in M \setminus X$  oder  $x \in M \setminus Y$   
 $\iff x \in C(X)$  oder  $x \in C(Y)$   
 $\iff x \in C(X) \cup C(Y)$ .
- (c)  $x \in C(X) \setminus Y \iff x \in C(X)$  und  $x \notin Y$   
 $\iff x \in M \setminus X$  und  $x \notin Y$   
 $\iff x \in M$  und  $x \notin X$  und  $x \notin Y$   
 $\iff x \in M$  und  $x \notin X \cup Y$   
 $\iff x \in M \setminus (X \cup Y)$   
 $\iff x \in C(X \cup Y)$ .
- (d) Wir zeigen zunächst  $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap C(Y \cup Z)$ .  
 $x \in X \setminus (Y \cup Z) \iff x \in X$  und  $x \notin Y \cup Z$   
 $\iff x \in X$  und  $x \in C(Y \cup Z)$   
 $\iff x \in X \cap C(Y \cup Z)$ .

Wir zeigen jetzt  $X \cap C(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$ .

$$\begin{aligned}
x \in X \cap C(Y \cup Z) &\iff x \in X \text{ und } x \in C(Y \cup Z) \\
&\iff x \in X \text{ und } x \in M \text{ und } x \notin Y \cup Z \\
&\iff x \in X \text{ und } x \notin Y \text{ und } x \notin Z \\
&\iff x \in X \setminus Y \text{ und } x \in X \setminus Z \\
&\iff x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch  $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap C(Y) \cap C(Z)$  zu beweisen.

$$\begin{aligned}
x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) &\iff x \in X \text{ und } x \notin Y \text{ und } x \notin Z \\
&\iff x \in X \text{ und } x \in C(Y) \text{ und } x \in C(Z) \\
&\iff x \in X \cap C(Y) \cap C(Z).
\end{aligned}$$