Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.3 Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $\mathrm{C}(X)$ das Komplement von X bez. M. Weiterhin sei $S = \{X_i : i \in I\}$ ein System von Mengen mit $X_i \subseteq M$. Zeigen Sie: **12/1/3/1**

(a) $\mathrm{C}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} X_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{C}(X_i)$,

(b) $\mathrm{C}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} \mathrm{C}(X_i)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.3 Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung beliebig vieler Mengen, das Komplement, die Differenz und die Gleichheit von Mengen, sowie die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw und der Quantoren: es gibt ein, für jedes. **12/1/3/2**

Lösung zu Aufgabe 1.3 Für $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$ bzw. $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ schreiben wir im Folgenden einfach $\bigcap X_i$ bzw. $\bigcup X_i$. **12/1/3/3**

(a)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(\textstyle\bigcup X_i) &\iff x \in M \setminus \textstyle\bigcup X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin \textstyle\bigcup X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin X_i \text{ für jedes } i \in I \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X_i) \text{ für jedes } i \in I \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap \mathrm{C}(X_i). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(\textstyle\bigcap X_i) &\iff x \in M \setminus \textstyle\bigcap X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin \textstyle\bigcap X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin X_i \text{ für ein } i \in I \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X_i) \text{ für ein } i \in I \\ &\iff x \in \textstyle\bigcup \mathrm{C}(X_i). \end{aligned}$$