

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.4 X, Y, Z seien Mengen von reellen Zahlen, so daß 12/1/4/1

$$X = \{x : -1 \leq x < 1\}, \quad Y = \{x : 1 \leq x \leq 3\}, \quad Z = \{x : 2 < x < 4\}.$$

Geben Sie die folgenden Mengen an:

- | | |
|--------------------------|------------------------------------|
| (a) $X \cap Y \cap Z,$ | (d) $\mathbb{C}(X \cup Z) \cap Y,$ |
| (b) $(X \cup Y) \cap Z,$ | (e) $(Y \setminus Z) \cup X,$ |
| (c) $X \cup (Y \cap Z),$ | (f) $Y \setminus (Z \cup X).$ |

Lösung zu Aufgabe 1.4

12/1/4/3

(a) $x \in X \cap Y \cap Z \iff -1 \leq x < 1 \text{ und } 1 \leq x \leq 3 \text{ und } 2 < x < 4$
 $\iff 2 < x \text{ und } x < 1;$

also $X \cap Y \cap Z = \emptyset.$

(b) $x \in (X \cup Y) \cap Z \iff (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } x \in Z$
 $\iff (-1 \leq x < 1 \text{ oder } 1 \leq x \leq 3) \text{ und } 2 < x < 4$
 $\iff 2 < x \text{ und } x \leq 3;$

also $(X \cup Y) \cap Z = \{x : 2 < x \leq 3\}.$

(c) $x \in X \cup (Y \cap Z) \iff -1 \leq x < 1 \text{ oder } (1 \leq x \leq 3 \text{ und } 2 < x < 4)$
 $\iff -1 \leq x < 1 \text{ oder } (2 < x \text{ und } x \leq 3);$

also $X \cup (Y \cap Z) = \{x : -1 \leq x < 1\} \cup \{x : 2 < x \leq 3\}.$

(d) $x \in \mathbb{C}(X \cup Z) \cap Y \iff x \in \mathbb{R} \setminus (X \cup Z) \text{ und } x \in Y$
 $\iff x \in \mathbb{R} \text{ und } x \notin (X \cup Z) \text{ und } x \in Y$
 $\iff x \in Y \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin Z$
 $\iff 1 \leq x \leq 3 \text{ und } (x < -1 \text{ oder } 1 \leq x) \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x)$
 $\iff (1 \leq x \leq 3) \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x)$
 $\iff 1 \leq x \leq 2;$

also $\mathbb{C}(X \cup Z) \cap Y = \{x : 1 \leq x \leq 2\}.$

(e) $x \in (Y \setminus Z) \cup X \iff (x \in Y \text{ und } x \notin Z) \text{ oder } x \in X$
 $\iff (1 \leq x \leq 3 \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x)) \text{ oder } -1 \leq x < 1$
 $\iff 1 \leq x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x \leq 3 \text{ oder } -1 \leq x < 1$
 $\iff -1 \leq x \leq 2;$

also $(Y \setminus Z) \cup X = \{x : -1 \leq x \leq 2\}.$

(f) $x \in Y \setminus (Z \cup X) \iff x \in Y \text{ und } x \notin Z \cup X$
 $\iff x \in Y \text{ und } (x \notin Z \text{ und } x \notin X)$
 $\iff 1 \leq x \leq 3 \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x) \text{ und } (x < -1 \text{ oder } 1 \leq x)$
 $\iff 1 \leq x \leq 2;$

also $Y \setminus (Z \cup X) = \{x : 1 \leq x \leq 2\}.$