# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

**1.4** $X$, $Y$, $Z$ seien Mengen von reellen Zahlen, so daß **12/1/4/1**
$X = \{x : -1 \leq x < 1\}$, $Y = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$, $Z = \{x : 2 < x < 4\}$.
Geben Sie die folgenden Mengen an:

| | |
|---|---|
| (a) $X \cap Y \cap Z$, | (d) $\mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y$, |
| (b) $(X \cup Y) \cap Z$, | (e) $(Y \setminus Z) \cup X$, |
| (c) $X \cup (Y \cap Z)$, | (f) $Y \setminus (Z \cup X)$. |

**Lösungshinweis zu Aufgabe 1.4** Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Gleichheit von Mengen und die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw, nicht. **12/1/4/2**

**Lösung zu Aufgabe 1.4** **12/1/4/3**

(a) $$\begin{aligned} x \in X \cap Y \cap Z &\iff -1 \leq x < 1 \text{ und } 1 \leq x \leq 3 \text{ und } 2 < x < 4 \\ &\iff 2 < x \text{ und } x < 1; \end{aligned}$$

also $X \cap Y \cap Z = \emptyset$.

(b) $$\begin{aligned} x \in (X \cup Y) \cap Z &\iff (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } x \in Z \\ &\iff (-1 \leq x < 1 \text{ oder } 1 \leq x \leq 3) \text{ und } 2 < x < 4 \\ &\iff 2 < x \text{ und } x \leq 3; \end{aligned}$$

also $(X \cup Y) \cap Z = \{x : 2 < x \leq 3\}$.

(c) $$\begin{aligned} x \in X \cup (Y \cap Z) &\iff -1 \leq x < 1 \text{ oder } (1 \leq x \leq 3 \text{ und } 2 < x < 4) \\ &\iff -1 \leq x < 1 \text{ oder } (2 < x \text{ und } x \leq 3); \end{aligned}$$

also $X \cup (Y \cap Z) = \{x : -1 \leq x < 1\} \cup \{x : 2 < x \leq 3\}$.

(d) $$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y &\iff x \in \mathbb{R} \setminus (X \cup Z) \text{ und } x \in Y \\ &\iff x \in \mathbb{R} \text{ und } x \notin (X \cup Z) \text{ und } x \in Y \\ &\iff x \in Y \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin Z \\ &\iff 1 \leq x \leq 3 \text{ und } (x < -1 \text{ oder } 1 \leq x) \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x) \\ &\iff (1 \leq x \leq 3) \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x) \\ &\iff 1 \leq x \leq 2; \end{aligned}$$

also $\mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y = \{x : 1 \leq x \leq 2\}$.

(e) $$\begin{aligned} x \in (Y \setminus Z) \cup X &\iff (x \in Y \text{ und } x \notin Z) \text{ oder } x \in X \\ &\iff \big(1 \leq x \leq 3 \text{ und } (x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x)\big) \text{ oder } -1 \leq x < 1 \\ &\iff 1 \leq x \leq 2 \text{ oder } 4 \leq x \leq 3 \text{ oder } -1 \leq x < 1 \\ &\iff -1 \leq x \leq 2; \end{aligned}$$

also $(Y \setminus Z) \cup X = \{x : -1 \leq x \leq 2\}$.

(f) $$\begin{aligned} x \in Y \setminus (Z \cup X) &\iff x \in Y \ \text{ und } \ x \notin Z \cup X \\ &\iff x \in Y \ \text{ und } \ (x \notin Z \ \text{ und } \ x \notin X) \\ &\iff 1 \leq x \leq 3 \ \text{ und } \ (x \leq 2 \ \text{ oder } \ 4 \leq x) \ \text{ und } \ (x < -1 \ \text{ oder } \ 1 \leq x) \\ &\iff 1 \leq x \leq 2; \end{aligned}$$

also $\quad Y \setminus (Z \cup X) = \{x : 1 \leq x \leq 2\}$.