

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.9 Es sei R eine zweistellige Relation in \mathbb{R} .

12/1/9/1

Verneinen Sie die folgenden Aussagen und führen Sie die jeweilige Verneinung so weit wie möglich aus:

- (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.
- (b) Nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.
- (c) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
- (d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.

Lösung zu Aufgabe 1.9

12/1/9/3

- (a) Nicht (für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$) \iff
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
[Hinweis: „für alle ...“ und „für jedes ...“ werden hier synonym gebraucht.]
- (b) Da die Aussage schon negiert ist, entsteht durch erneute Verneinung eine doppelte Negation; die gewünschte äquivalente Aussage ist somit:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.
- (c) Nicht (es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$) \iff
für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $(x, y) \in R$.
- (d) Die Negation von: „es gibt genau ein ...“ ist „es gibt kein ... (bzw. nicht(es gibt ein) ...)“ oder „es gibt zwei ...“. Folglich gilt:
Nicht (für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$) \iff
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß (es gibt kein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$ oder es gibt ein $y_1 \in \mathbb{R}$ und es gibt ein $y_2 \in \mathbb{R}$, so daß $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$).