Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.9 Es sei R eine zweistellige Relation in $\mathbb{R}$. **12/1/9/1**
Verneinen Sie die folgenden Aussagen und führen Sie die jeweilige Verneinung so weit wie möglich aus:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.

(b) Nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.

(c) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.9 Die Lösung ergibt sich in jedem Fall durch einfache Negation der Quantoren. **12/1/9/2**

Lösung zu Aufgabe 1.9 **12/1/9/3**

(a) Nicht$\Big($für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R\Big)$ $\iff$
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
[Hinweis: „für alle ...“ und „für jedes ...“ werden hier synonym gebraucht.]

(b) Da die Aussage schon negiert ist, entsteht durch erneute Verneinung eine doppelte Negation; die gewünschte äquivalente Aussage ist somit:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.

(c) Nicht$\Big($es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R\Big)$ $\iff$
für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $(x, y) \in R$.

(d) Die Negation von: „es gibt genau ein ...“ ist „es gibt kein ... (bzw. nicht(es gibt ein) ...)“ oder „es gibt zwei ...“. Folglich gilt:
Nicht$\Big($für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R\Big)$ $\iff$
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $\Big($es gibt kein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$ oder es gibt ein $y_1 \in \mathbb{R}$ und es gibt ein $y_2 \in \mathbb{R}$, so daß $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2 \in R)\Big)$.