Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.11 Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß: **12/1/11/1**

(a) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $x > -1$, (Bernoullische Ungleichung)

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 1.11 **12/1/11/3**

(a) 1. *Anfangsschritt*: $n = 0$; hierfür ist die Ungleichung offenbar erfüllt.
2. *Induktionsvoraussetzung*: Für n gelte die Behauptung bereits.
3. *Induktionsbehauptung*: Es gilt auch $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.
Es ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1 + x + nx + nx^2\\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) &= \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)\\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{6}(6n^2 + 12n + 6)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n^2 + 2n + 1\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2.\end{aligned}$$