

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

- 1.11 Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß: 12/1/11/1
- (a) $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x > -1$, (Bernoullische Ungleichung)
- (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.11 Die Induktion ist leicht ausführbar. 12/1/11/2

Lösung zu Aufgabe 1.11 12/1/11/3

- (a) 1. *Anfangsschritt*: $n = 0$; hierfür ist die Ungleichung offenbar erfüllt.
 2. *Induktionsvoraussetzung*: Für n gelte die Behauptung bereits.
 3. *Induktionsbehauptung*: Es gilt auch $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Es ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

- (b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt.
 2. Für n gelte die Behauptung bereits.
 3. Wir zeigen: $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) &= \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{6}(6n^2 + 12n + 6) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n^2 + 2n + 1 \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2. \end{aligned}$$