Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.13 Beweisen Sie: **12/1/13/1**

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} \geq 2^n$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.13 (a) Im Induktionsschritt genügt zu zeigen, daß $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$. **12/1/13/2**

Durch Quadrieren läßt sich die Ungleichung leicht verifizieren.

(b) Der Beweis befolgt problemlos; es genügt, $\frac{2(2n+1)}{n+1} \geq 2$ nachzuweisen.

Lösung zu Aufgabe 1.13 Wir beweisen die Ungleichungen induktiv über n. **12/1/13/3**

(a) 1. Für $n = 1$ ist die Ungleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen die Behauptung für $n+1$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\ &< \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \ \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}. \ \text{(dies ist noch nachzuweisen)}\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \iff \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{2n+2}{2n+1} \iff$$

$$\frac{3n+4}{3n+1} \leq \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2} \iff (3n+4)(2n+1)^2 \leq 4(3n+1)(n+1)^2 \iff$$

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \iff 0 \leq n;$$

und dies gilt.

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Ungleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}$.

Es ist

$$\begin{aligned}\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \\ &\geq 2^n \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.\end{aligned}$$