Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.14 Beweisen Sie: **12/1/14/1**

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ gerade, so ist k^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 2^n teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ ist $3^n \leq n!$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 1.14 Die Beweise erfolgen induktiv über n. **12/1/14/3**

(a) 1. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig.
2. Für n gelte bereits: $2^n | k^n$.
3. Wir zeigen: $2^{n+1} | k^{n+1}$.
Es ist $k^{n+1} = k^n \cdot k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist k^n durch 2^n teilbar.
Da k gerade ist, teilt 2 auch k. Also $2^{n+1} | k^{n+1}$.

(b) 1. Für $n = 7$ ist $3^n = 2187$ und $n! = 5040$, also $3^n \leq n!$.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $3^{n+1} \leq (n+1)!$. Es ist

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \leq n! \cdot 3 \leq n!(n+1) = (n+1)!.$$

(c) 1. Für $n = 1$ gilt die Gleichheit.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{(2n+1)\big(n(2n-1) + 3(2n+1)\big)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3}.
\end{aligned}$$