

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.14 Beweisen Sie: 12/1/14/1

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ gerade, so ist k^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 2^n teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ ist $3^n \leq n!$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.14 Die Beweise lassen sich sehr leicht führen. 12/1/14/2

Lösung zu Aufgabe 1.14 Die Beweise erfolgen induktiv über n . 12/1/14/3

(a) 1. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig.

2. Für n gelte bereits: $2^n | k^n$.

3. Wir zeigen: $2^{n+1} | k^{n+1}$.

Es ist $k^{n+1} = k^n \cdot k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist k^n durch 2^n teilbar.

Da k gerade ist, teilt 2 auch k . Also $2^{n+1} | k^{n+1}$.

(b) 1. Für $n = 7$ ist $3^7 = 2187$ und $n! = 5040$, also $3^n \leq n!$.

2. Für n gelte die Behauptung bereits.

3. Wir zeigen: $3^{n+1} \leq (n+1)!$. Es ist

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \leq n! \cdot 3 \leq n!(n+1) = (n+1)!$$

(c) 1. Für $n = 1$ gilt die Gleichheit.

2. Für n gelte die Behauptung bereits.

3. Wir zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(n(2n-1) + 3(2n+1))}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3}. \end{aligned}$$