Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.15 Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt: **12/1/15/1**

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Lösung zu Aufgabe 1.15 Die Beweise erfolgen induktiv über n. **12/1/15/3**

(a) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)(n+1)\\ &= \frac{2n^2+7n+6}{6}\cdot(n+1)\\ &= \frac{(n+2)(2n+3)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir beweisen: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\cdot\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right)\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\cdot(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

(c) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$