

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.15 Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

12/1/15/1

$$(a) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(b) \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$(c) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.15 Die Beweise lassen sich sehr leicht führen.

12/1/15/2

Lösung zu Aufgabe 1.15 Die Beweise erfolgen induktiv über n .

12/1/15/3

- (a) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
 2. Für n gelte die Behauptung bereits.
 3. Wir zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) (n+1) \\ &= \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \cdot (n+1) \\ &= \frac{(n+2)(2n+3)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

- (b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
 2. Für n gelte die Behauptung bereits.
 3. Wir beweisen: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

- (c) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
 2. Für n gelte die Behauptung bereits.

3. Wir zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$