

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.4 Zeigen Sie, daß für $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$. 12/2/4/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.4 Die störenden Wurzeln werden durch (mehrmaliges) Quadrieren beseitigt.

(Achtung: Vorzeichen der zu quadrierenden Terme beachten!)

Lösung zu Aufgabe 2.4 Wegen $a > 1$ sind beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung positiv. Folglich gilt nach Quadrieren: 12/2/4/3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} &\iff \frac{1}{a} < a+1 - 2\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}a - 1 = 2a - 2\sqrt{a^2-1} \\ &\iff 1 < 2a^2 - 2a\sqrt{a^2-1} \\ &\iff 2a\sqrt{a^2-1} < 2a^2 - 1 \quad (\text{beide Seiten positiv}) \\ &\iff 4a^2(a^2-1) < 4a^4 - 4a^2 + 1 \\ &\iff 0 < 1; \quad \text{und dies gilt.} \end{aligned}$$