Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.5 Für $a, b \in \mathbb{R}$ zeige man: **12/2/5/1**

(a) Wenn $a, b \geq 0$, so $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(b) Wenn $a, b > 0$, so $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

(c) Wenn $a, b > 0$ und $a \cdot b = 1$, so $a + b \geq 2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.5 Durch einfache Abschätzungen erhält man die Behauptungen. **12/2/5/2**

Lösung zu Aufgabe 2.5 **12/2/5/3**

(a) Es ist

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff 2\sqrt{ab} \leq a + b \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b^2);$$

und die letzte Ungleichung gilt.

(b) Es ist

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \iff a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0;$$

und dies gilt.

(c) Wegen $ab = 1$ ist $b = \frac{1}{a}$. Somit ist

$$a + b = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \iff a^2 + 1 \geq 2a \iff a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0;$$

und dies gilt.