Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.6 Man bestimme die jeweilige Menge der reellen Zahlen x, die die folgenden Ungleichungen erfüllt: **12/2/6/1**

(a) $\frac{3x+2}{2x+3} > x+1$ (b) $\frac{2x+1}{3x-3} > \frac{3x-3}{2x+1}$ (c) $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.6 Es sei L die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. **12/2/6/2**

(a) $L = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\}$.

(b) $L = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}) \cup (1,4)$ (Vereinigung von Intervallen).

(c) $L = (-1,2) \cup (5,\infty)$ (Vereinigung von Intervallen).

Lösung zu Aufgabe 2.6 **12/2/6/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Ungleichung (a).
Wir nehmen zunächst eine Fallunterscheidung vor; die Lösungsmenge für den i-ten Fall wird mit L_i bezeichnet.

1. $2x+3>0$, also $x > -\frac{3}{2}$. Hierfür gilt:

$$(\star) \iff 3x+2 > (x+1)(2x+3) = 2x^2+5x+3 \iff 0 > 2x^2+2x+1$$
$$\iff 0 > x^2+x+\tfrac{1}{2} = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Diese Ungleichung ist durch kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also $L_1 = \emptyset$.

2. $2x+3<0$, also $x < -\frac{3}{2}$. Hierfür gilt:

$$(\star) \iff 3x+2 < (x+1)(2x+3) \iff 0 < \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, also $L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\right\}$.
Insgesamt erhält man als Lösungsmenge $L = L_2$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen zunächt wieder eine Fallunterscheidung vor:

1. $3x-3>0$ und $2x+1>0 \iff x>1$ und $x > -\frac{1}{2} \iff x>1$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff (2x+1)^2 > (3x-3)^2 \iff 2x+1 > 3x-3 \iff 4 > x.$$

Die Lösungsmenge hierfür $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$.

2. $3x-3>0$ und $2x+1<0 \iff 1 < x < -\frac{1}{2}$; ↯ $L_2 = \emptyset$.

3. $3x-3<0$ und $2x+1>0 \iff x<1$ und $-\frac{1}{2} < x < 1$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff (2x+1)^2 < (3x-3)^2 = (\underbrace{3-3x}_{>0})^2$$
$$\iff 2x+1 < 3-3x \iff x < \frac{2}{5}.$$

Es ist $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{5}\}$.

4. $3x - 3 < 0$ und $2x + 1 < 0 \iff x < 1$ und $x < -\frac{1}{2} \iff x < -\frac{1}{2}$.

$(\star\star) \iff (1 + 2x)^2 > (3 - 3x)^2 \iff 1 + 2x > 3 - 3x \iff x > \frac{2}{5}$.

Wegen $x < -\frac{1}{2}$ und $x > \frac{2}{5}$ ist $L_4 = \emptyset$.

Insgesamt erhält man als Lösungsmenge die Vereinigung von L_1 und L_3:

$L = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}) \cup (1, 4)$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).

Es wird wieder eine Fallunterscheidung vorgenommen:

1. $x + 1 > 0$ und $x - 2 > 0 \iff x > -1$ und $x > 2 \iff x > 2$. Dann gilt:

$(\star\star\star) \iff 2(x - 2) > x + 1 \iff x > 5$.

$L_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$.

2. $x + 1 > 0$ und $x - 2 < 0 \iff -1 < x < 2$. Dann gilt:

$(\star\star\star) \iff 2(x - 2) < x + 1 \iff x < 5$.

Somit ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$.

3. $x + 1 < 0$ und $x - 2 > 0 \iff 2 < x < -1$, $\lightning$ Also $L_3 = \emptyset$.

4. $x + 1 < 0$ und $x - 2 < 0 \iff x < -1$ und $x < 2 \iff x < -1$. Dann gilt:

$(\star\star\star) \iff 2(x - 2) > x + 1 \iff x > 5$.

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x < -1\} = \emptyset$.

Die Gesamtlösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = (-1, 2) \cup (5, \infty)$.