Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.7 Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen: **12/2/7/1**

(a) $\frac{|x-1|}{2x+3} = \frac{1}{3}$, (b) $|2x-1| < |x-1|$, (c) $|x+2| + |x-2| \leq 12$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.7 Es sei L die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. Durch geeignete Fallunterscheidung vermeidet man die Beträge. **12/2/7/2**

(a) $L = \{0, 6\}$.

(b) $L = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{2}{3}\}$.

(c) $L = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 6\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.7 **12/2/7/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Gleichung (a).
Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor:
1. $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x-1$. Dann gilt:
$$(\star) \iff 3(x-1) = 2x+3 \iff x = 6; \quad L_1 = \{6\}.$$
2. $x - 1 < 0 \iff x < 1$ und $|x-1| = 1-x$. Dann gilt:
$$(\star) \iff 3(1-x) = 2x+3 \iff -5x = 0 \iff x = 0; \quad L_2 = \{0\}.$$
Die gesamte Lösungsmenge beträgt $L = \{0, 6\}$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor:
1. $2x-1 \geq 0$ und $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|2x-1| = 2x-1$ und $|x-1| = x-1$.
Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 2x-1 < x-1 \iff x < 0;$$
also $L_1 = \emptyset$.
2. $2x-1 \geq 0$ und $x-1 < 0 \iff \frac{1}{2} \leq x < 1$ und $|2x-1| = 2x-1$ und $|x-1| = 1-x$. Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 2x-1 < 1-x \iff 3x < 2 \iff x < \frac{2}{3};$$
$L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}\right\}$.
3. $2x-1 < 0$ und $x-1 \geq 0$; also $1 \leq x < \frac{1}{2}$, ↯! $L_3 = \emptyset$.
4. $2x-1 < 0$ und $x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$ und $|2x-1| = 1-2x$ und $|x-1| = 1-x$.
Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 1-2x < 1-x \iff 0 < x;$$
also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{2}\}$.
Die Gesamtlösungsmenge beträgt $L = L_2 \cup L_4 = (0, \frac{2}{3})$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).
Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor:

1. $x+2 \geq 0$ und $x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$ und $|x+2| = x+2$ und $|x-2| = x-2$.
Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff x+2+x-2 \leq 12 \iff x \leq 6;$$
also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$.

2. $x+2 \geq 0$ und $x-2 < 0 \iff -2 \leq x < 2$ und $|x+2| = x+2$ und $|x-2| = 2-x$. Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff x+2+2-x \leq 12 \iff 0 \leq 8;$$
diese Ungleichung ist für alle x erfüllt. Also $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$.

3. $x+2 < 0$ und $x-2 \geq 0 \iff 2 \leq x \leq -2$, ↯! $L_3 = \emptyset$.

4. $x+2 < 0$ und $x-2 < 0 \iff x \leq -2$ und $|x+2| = -x-2$ und $|x-2| = 2-x$.
Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff -x-2+2-x \leq 12 \iff x \geq -6;$$
also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -2\}$.

Die Gesamtlösungsmenge beträgt also $L = L_1 \cup L_2 \cup L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 6\}$.