Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.8 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die jeweils gilt: **12/2/8/1**
(a) $\big||x|+1\big| = 2,$ (b) $|x-1| \leq |2x+5|,$ (c) $|x+1| + |x-1| = |x|.$

Lösung zu Aufgabe 2.8 **12/2/8/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Gleichung (a).
Es gilt stets $|x|+1 > 0$, folglich ist $\big||x|+1\big| = |x|+1$ und somit

$$(\star) \iff |x|+1 = 2 \iff |x| = 1.$$

Daraus ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{-1, 1\}$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. $x-1 \geq 0$ und $2x+5 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x-1$ und $|2x+5| = 2x+5$.
Dann gilt:

$$(\star\star) \iff x-1 \leq 2x+5 \iff -6 \leq x;$$

also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$.

2. $x-1 \geq 0$ und $2x+5 < 0 \iff 1 \leq x \leq -\frac{5}{2}$, ↯!
Also $L_1 = \emptyset$.

3. $x-1 < 0$ und $2x+5 \geq 0 \iff -\frac{5}{2} \leq x < 1$ und $|x-1| = 1-x$ und $|2x+5| = 2x+5$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 1-x \leq 2x+5 \iff -\frac{4}{3} \leq x;$$

also $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{4}{3} \leq x < 1\}$.

4. $x-1 < 0$ und $2x+5 < 0 \iff x < -\frac{5}{2}$ und $|x-1| = 1-x$ und $|2x+5| = -2x-5$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 1-x \leq -2x-5 \iff x \leq -6;$$

also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -6\}$.

Damit ist die Gesamtlösungsmenge $L = L_1 \cup L_3 \cup L_4 = \mathbb{R} \setminus (-6, -\frac{4}{3})$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. $x \geq 1$; somit $|x+1| = x+1$, $|x-1| = x-1$ und $|x| = x$. Dann gilt:

$$(\star\star\star) \iff x+1+x-1 = x \iff x = 0; \quad \text{also } L_1 = \{0\}.$$

2. $0 \leq x < 1$; somit ist $|x+1| = x+1$, $|x-1| = 1-x$ und $|x| = x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff x+1+1-x = x \iff x = 2; \quad \text{also } L_2 = \{2\}.$$

3. $-1 \leq x < 0$; damit ist $|x+1| = x+1$, $|x-1| = 1-x$ und $|x| = -x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff x+1+1-x = -x \iff x = -2; \text{ also } L_3 = \{-2\}.$$

4. $x < -1$; somit ist $|x+1| = -x-1$, $|x-1| = 1-x$ und $|x| = -x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff -x-1+1-x = -x \iff x = 0; \text{ also } L_4 = \{0\}.$$

Die Gesamtlösungsmenge ist $L = \{-2, 0, 2\}$.