

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.2 Reelle Zahlen

**2.8** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für die jeweils gilt: 12/2/8/1

(a)  $||x| + 1| = 2$ ,      (b)  $|x - 1| \leq |2x + 5|$ ,      (c)  $|x + 1| + |x - 1| = |x|$ .

**Lösungshinweis zu Aufgabe 2.8** Es sei  $L$  die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. Durch geeignete Fallunterscheidung vermeidet man die Beträge. 12/2/8/2

(a)  $L = \{-1, 1\}$ .

(b)  $L = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -6 < x < -\frac{4}{3}\}$ .

(c)  $L = \{-2, 0, 2\}$ .

#### Lösung zu Aufgabe 2.8

12/2/8/3

(a) (★) bezeichne die Gleichung (a).

Es gilt stets  $|x| + 1 > 0$ , folglich ist  $||x| + 1| = |x| + 1$  und somit

$$(★) \iff |x| + 1 = 2 \iff |x| = 1.$$

Daraus ergibt sich als Lösungsmenge  $L = \{-1, 1\}$ .

(b) (★★) bezeichne die Ungleichung (b).

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1.  $x - 1 \geq 0$  und  $2x + 5 \geq 0 \iff x \geq 1$  und  $|x - 1| = x - 1$  und  $|2x + 5| = 2x + 5$ .

Dann gilt:

$$(★★) \iff x - 1 \leq 2x + 5 \iff -6 \leq x;$$

also  $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$ .

2.  $x - 1 \geq 0$  und  $2x + 5 < 0 \iff 1 \leq x \leq -\frac{5}{2}$ , **N!**

Also  $L_1 = \emptyset$ .

3.  $x - 1 < 0$  und  $2x + 5 \geq 0 \iff -\frac{5}{2} \leq x < 1$  und  $|x - 1| = 1 - x$  und  $|2x + 5| = 2x + 5$ . Dann gilt:

$$(★★) \iff 1 - x \leq 2x + 5 \iff -\frac{4}{3} \leq x;$$

also  $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{4}{3} \leq x < 1\}$ .

4.  $x - 1 < 0$  und  $2x + 5 < 0 \iff x < -\frac{5}{2}$  und  $|x - 1| = 1 - x$  und  $|2x + 5| = -2x - 5$ . Dann gilt:

$$(★★) \iff 1 - x \leq -2x - 5 \iff x \leq -6;$$

also  $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -6\}$ .

Damit ist die Gesamtlösungsmenge  $L = L_1 \cup L_3 \cup L_4 = \mathbb{R} \setminus (-6, -\frac{4}{3})$ .

(c) (\*\*\*) bezeichne die Ungleichung (c).

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1.  $x \geq 1$ ; somit  $|x + 1| = x + 1$ ,  $|x - 1| = x - 1$  und  $|x| = x$ . Dann gilt:

$$(***) \iff x + 1 + x - 1 = x \iff x = 0; \text{ also } L_1 = \{0\}.$$

2.  $0 \leq x < 1$ ; somit ist  $|x + 1| = x + 1$ ,  $|x - 1| = 1 - x$  und  $|x| = x$ .

Folglich ist:

$$(***) \iff x + 1 + 1 - x = x \iff x = 2; \text{ also } L_2 = \{2\}.$$

3.  $-1 \leq x < 0$ ; damit ist  $|x + 1| = x + 1$ ,  $|x - 1| = 1 - x$  und  $|x| = -x$ .

Folglich ist:

$$(***) \iff x + 1 + 1 - x = -x \iff x = -2; \text{ also } L_3 = \{-2\}.$$

4.  $x < -1$ ; somit ist  $|x + 1| = -x - 1$ ,  $|x - 1| = 1 - x$  und  $|x| = -x$ .

Folglich ist:

$$(***) \iff -x - 1 + 1 - x = -x \iff x = 0; \text{ also } L_4 = \{0\}.$$

Die Gesamtlösungsmenge ist  $L = \{-2, 0, 2\}$ .