Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.9 Bilden Sie $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$ für die folgenden Mengen von reellen Zahlen: **12/2/9/1**

$M = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > |2x+3|\}, \qquad N = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| < |4x-7|\}.$

Lösung zu Aufgabe 2.9 Wir bestimmen die Mengen M, N und betrachten dazu zunächst die Ungleichung **12/2/9/3**

$(\star) \ : \ |x-1| > |2x+3|.$

Es werden folgende Fallunterscheidungen vorgenommen:

1. $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x-1$, $|2x+3| = 2x+3$. Dann gilt:

$$(\star) \iff x-1 > 2x+3 \iff -4 > x.$$

Also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < -4\} = \emptyset$.

2. $x-1 < 0$ und $2x+3 \geq 0 \iff -\frac{3}{2} \leq x < 1$ und $|x-1| = 1-x$, $|2x+3| = 2x+3$. Dann gilt:

$$(\star) \iff 1-x > 2x+3 \iff -\frac{2}{3} > x.$$

Also $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{2}{3}\}$.

3. $x-1 \geq 0$ und $2x+3 < 0 \iff 1 \leq x < -\frac{3}{2}$, ↯!

Also $L_3 = \emptyset$.

4. $x-1 < 0$ und $2x+3 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$ und $|x-1| = 1-x$, $|2x+3| = -2x-3$. Folglich gilt:

$$(\star) \iff 1-x > -2x-3 \iff x > -4.$$

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\frac{3}{2}\}$, und schließlich

$$M = L_2 \cup L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\frac{2}{3}\}.$$

Es sei nun $(\star\star) \ : \ |2x+3| < |4x-7|$.

Wir nehmen auch hier wieder eine Fallunterscheidung vor.

1. $2x+3 \geq 0$ und $4x-7 \geq 0 \iff x \geq \frac{7}{4}$ und $|2x+3| = 2x+3$, $|4x-7| = 4x-7$. Folglich gilt:

$$(\star\star) \iff 2x+3 < 4x-7 \iff 5 < x.$$

Also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}$.

2. $2x+3 < 0$ und $4x-7 \geq 0 \iff \frac{7}{4} \leq x < -\frac{3}{2}$, ↯! Also $L_2 = \emptyset$.

3. $2x+3 \geq 0$ und $4x-7 < 0 \iff -\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{4}$ und $|2x+3| = 2x+3,\ |4x-7| = 7-4x$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 2x+3 < 7-4x \iff x < \frac{2}{3}.$$

Also $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \leq x < \frac{2}{3}\}$.

4. $2x+3 < 0$ und $4x-7 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$ und $|2x+3| = -2x-3,\ |4x-7| = 7-4x$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff -2x-3 < 7-4x \iff x < 5.$$

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\}$, und schließlich

$$N = \{x \in \mathbb{R} : x < \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$

Wegen $M \subseteq N$ ist

$$M \cap N = M = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\tfrac{2}{3}\},\quad M \cup N = N,\quad M \setminus N = \emptyset.$$

Weiterhin ist

$$N \setminus M = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{2}{3} \leq x < \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$