

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.2 Reelle Zahlen

2.10 Geben Sie (falls existent) Infimum und Supremum folgender Mengen an:

12/2/10/1

- (a)  $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 2x \leq 0\}$ ,
- (b)  $\{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$ ,
- (c)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ ,
- (d)  $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ ,
- (e)  $\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ .

#### Lösung zu Aufgabe 2.10

12/2/10/3

- (a) Es sei  $p(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$  und  $M_a = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \leq 0\}$ .  
Es ist  $p(x) = x(x^3 - 3x - 2)$ ; durch „probieren“ erkennt man, daß  $-1$  eine Nullstelle von  $p$  ist. Folglich ist  $x^3 - 3x - 2$  durch  $x + 1$  teilbar. Das verbleibende quadratische Polynom hat die Nullstellen  $-1$  und  $2$ .  
Folglich ist  $p(x) = x(x + 1)^2(x - 2)$ .  
Damit gilt:  $p(x) \leq 0 \iff x(x - 2) \leq 0$ .  
1. Fall:  $x < 0$ ; dann gilt:  
 $x(x - 2) \leq 0 \iff x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$ . Also  $2 \leq x < 0$ , **N!**  
2. Fall:  $x \geq 0$ ; dann gilt:  
 $x(x - 2) \leq 0 \iff x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2$ .  
Insgesamt  $p(x) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2$ .  
Folglich ist  $\inf M_a = 0$  und  $\sup M_a = 2$ .
- (b) Es sei  $M_b = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$ .  
Dann ist  $\inf M_b = 1$  und das Supremum von  $M_b$  existiert nicht.
- (c) Es sei  $M_c = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ .  
Dann ist offenbar  $\inf M_c = 0$  und  $\sup M_c = 1$ .
- (d) Sei  $M_d = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ .  
Für  $n = 1$  bzw.  $n = 2$  ist  $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 0$  bzw.  $= \frac{3}{2}$ . Schließlich gilt:  
 $0 \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{2}$  für alle  $n \neq 0$ . Also  $\inf M_d = 0$  und  $\sup M_d = \frac{3}{2}$ .
- (e) Sei  $M_e = \{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$ .

Für  $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$  ist  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ . Folglich ist  $\inf M_e = a_1 = \frac{1}{2}$ .

Weiterhin gilt  $a_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$  (nach Aufgabe 1.16)

Offenbar ist 2 eine obere Schranke von  $M_e$ .

Angenommen, es gibt ein  $c < 2$  und  $c$  ist auch eine obere Schranke von  $M_e$ , dann ist  $a_n \leq c := 2 - \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

Damit erhält man:

$$2 - \frac{1}{2^n} \leq c = 2 - \varepsilon \iff \varepsilon \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{1}{\varepsilon} \geq 2^n \geq 2n \text{ für alle } n \geq 1;$$

und dies widerspricht dem Archimedischen Axiom.

Folglich ist 2 die kleinste obere Schranke von  $M_e$  und somit  $\sup M_e = 2$ .