Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.10 Geben Sie (falls existent) Infimum und Supremum folgender Mengen an: **12/2/10/1**

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 2x \leq 0\}$,

(b) $\{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$,

(c) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$,

(d) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$,

(e) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.10 Es seien $M_a, \ldots, M_e$ die in den Aufgaben (a) - (e) gegebenen Mengen. **12/2/10/2**

(a) $\inf M_a = 0$, $\sup M_a = 2$.

(b) $\inf M_b = 1$, $\sup M_b$ existiert nicht.

(c) $\inf M_c = 0$, $\sup M_c = 1$.

(d) $\inf M_d = 0$, $\sup M_d = \frac{2}{3}$.

(e) $\inf M_e = \frac{1}{2}$, $\sup M_e = 2$.

Lösung zu Aufgabe 2.10 **12/2/10/3**

(a) Es sei $p(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ und $M_a = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \leq 0\}$.
Es ist $p(x) = x(x^3-3x-2)$; durch „probieren“ erkennt man, daß -1 eine Nullstelle von p ist. Folglich ist x^3-3x-2 durch $x+1$ teilbar. Das verbleibende quadratische Polynom hat die Nullstellen -1 und 2.
Folglich ist $p(x) = x(x+1)^2(x-2)$.
Damit gilt: $p(x) \leq 0 \iff x(x-2) \leq 0$.
1. Fall: $x < 0$; dann gilt:
$$x(x-2) \leq 0 \iff x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2. \text{ Also } 2 \leq x < 0, \quad \lightning!$$
2.Fall: $x \geq 0$; dann gilt:
$$x(x-2) \leq 0 \iff x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2.$$
Insgesamt $p(x) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2$.
Folglich ist $\inf M_a = 0$ und $\sup M_a = 2$.

(b) Es sei $M_b = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$.
Dann ist $\inf M_b = 1$ und das Supremum von M_b existiert nicht.

(c) Es sei $M_c = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$.
Dann ist offenbar $\inf M_c = 0$ und $\sup M_c = 1$.

(d) Sei $M_d = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\}$.
Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ ist $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 0$ bzw. $= \frac{3}{2}$. Schließlich gilt:
$0 \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{2}$ für alle $n \neq 0$. Also $\inf M_d = 0$ und $\sup M_d = \frac{3}{2}$.

(e) Sei $M_e = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\}$.
Für $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ ist $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Folglich ist $\inf M_e = a_1 = \frac{1}{2}$.
Weiterhin gilt $a_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (nach Aufgabe 1.16)
Offenbar ist 2 eine obere Schranke von M_e.
Angenommen, es gibt ein $c < 2$ und c ist auch eine obere Schranke von M_e, dann ist $a_n \leq c := 2 - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.
Damit erhält man:

$$2 - \frac{1}{2^n} \leq c = 2 - \varepsilon \iff \varepsilon \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{1}{\varepsilon} \geq 2^n \geq 2n \text{ für alle } n \geq 1;$$

und dies widerspricht dem Archimedischen Axiom.
Folglich ist 2 die kleinste obere Schranke von M_e und somit $\sup M_e = 2$.