Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.11 Es seien X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Mengen, die ein Supremum besitzen; außerdem sei **12/2/11/1**

$$X + Y = \{x + y : x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Man beweise, daß dann $\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)$ gilt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.11 Man zeige, daß $\sup X + \sup Y$ die kleinste obere Schranke von $X + Y$ ist. „Obere Schranke“ ist fast trivial. „Kleinste obere Schranke“ läßt sich am einfachsten indirekt nachweisen. **12/2/11/2**

Lösung zu Aufgabe 2.11 Nach Voraussetzung sind X und Y nach oben beschränkt, folglich gilt dies auch für die Menge $X + Y$. **12/2/11/3**

Es genügt zu zeigen, daß $\sup X + \sup Y$ die kleinste obere Schranke von $X + Y$ ist.

Für $x \in X$ und $y \in Y$ ist $x \leq \sup X$ und $y \leq Y$, also $x + y \leq \sup X + \sup Y$.

Angenommen, es gibt eine kleinere obere Schranke S von $X + Y$.

Dann ist $S < \sup X + \sup Y$ und $x + y \leq S$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Wir setzen $\varepsilon := \sup X + \sup Y - S$. Nach Definition des Supremums sind dann $\sup X - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2}$ keine oberen Schranken von X bzw. von Y. Folglich gibt es Elemente $x' \in X$ und $y' \in Y$, so daß $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x' \leq \sup X$ und $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2} < y' \leq \sup Y$; also $S = \sup X + \sup Y - \varepsilon < x' + y'$.

Damit ist S keine obere Schranke von $X + Y$, ↯!