Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.13 Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Behauptung: **12/2/13/1**
Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $\sup\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = \sup X - \inf Y$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.13 Ist X nicht nach oben und Y nicht nach unten beschränkt, dann gilt die Behauptung nicht, denn dann hat die Menge kein Supremum. Unter der Voraussetzung „X ist nach oben und Y nach unten beschränkt“ gilt die Behauptung. **12/2/13/2**

Lösung zu Aufgabe 2.13 Wir definieren zunächst eine Menge $-Y := \{-y : y \in Y\}$. Damit ist **12/2/13/3**

$\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = X + (-Y)$ (vgl. Aufgabe 2.11).

Wenn X nicht nach oben oder Y nicht nach unten beschränkt ist, dann gilt die Behauptung nicht, denn in diesem Falle ist $X + (-Y)$ nicht nach oben beschränkt, besitzt also kein Supremum.

Unter der Voraussetzung, daß X nach oben und Y nach unten beschränkt ist, beweisen wir die Behauptung.

Wegen der Beschränktheit von Y nach unten ist $-Y$ nach oben beschränkt. Folglich gilt nach Aufgabe 2.11:

$$\sup\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = \sup\left(X + (-Y)\right) = \sup X + \sup(-Y).$$

Es genügt also nachzuweisen, daß $\sup(-Y) = -\inf Y$.

Sei $a := \inf Y$, d.h., $a \leq y$ für alle $y \in Y$ und es gibt keine größere Schranke von Y.

Aus $a \leq y$ folgt $-y \leq -a$; somit ist $-a$ eine obere Schranke von $-Y$. Gäbe es eine kleinere obere Schranke $S < -a$ von $-Y$, so wäre $-y \leq S < -a$ für alle $-y \in -Y$, also $a < -S \leq y$. Damit ist a nicht die untere Grenze von Y, ↯!

Schließlich ist $\sup(-Y) = -a = -\inf Y$ und die Behauptung bewiesen.