Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.14 Zeigen Sie, daß die Menge $M = \{n\cdot a^n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 1\}$ beschränkt ist, falls $0 < a < 1$. Berechnen Sie $\inf M$. **12/2/14/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.14 Ist $|a| < 1$ und $\varepsilon > 0$, so ist $n|a|^n < \varepsilon$ für fast alle n; also $\inf Y = 0$. **12/2/14/2**

Lösung zu Aufgabe 2.14 Offenbar ist M durch 0 nach unten beschränkt. **12/2/14/3**

Wir zeigen jetzt, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $n\cdot a^n < \varepsilon$. Es ist $n\cdot a^n < \varepsilon \iff n < \varepsilon\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Wegen $0 < a < 1$ ist $1 < \frac{1}{a} := c + 1$ für ein $c > 0$. Nach dem binomischen Satz gilt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (c+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^i \geq 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2.$$

Somit ist

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n = \varepsilon(c+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2\varepsilon \quad \text{und}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2\varepsilon > n \iff \frac{2}{c^2\varepsilon} + 1 < n,$$

und dies gilt für alle $n \geq n_0$ von einer Stelle n_0 an.

Damit ist $S = \varepsilon + \max\{n\cdot a^n : n < n_0\}$ eine obere Schranke von M, also ist M nach oben beschränkt und $\inf Y = 0$.