Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.15 Zu folgenden Mengen gebe man (im Falle der Existenz) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an! **12/2/15/1**

(a) $M = \{x : \sin x = 0\}$,

(b) $M = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 < \cos 0\}$,

(c) $M = \{y : \text{ es gibt ein } x \text{ mit } \cos x < y\}$,

(d) $M = \{x : x^2 + 10x + 24 \leq 0\}$,

(e) $M = \{y : \text{ es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A\}$, wobei
$A = \{(x, y) : x > -1 \text{ und } y > 2x\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.15 **12/2/15/3**

(a) Offenbar ist $M = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; folglich besitzt M kein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.

(b) Es ist $x^2 < \cos 0 = 1 \iff |x| < 1$; also $M = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$. Folglich ist $\inf M = -1$ und $\sup M = 1$; M besitzt kein Minimum und kein Maximum.

(c) Für $y \leq -1$ existiert kein x mit $\cos x < y \leq -1$.
Sei nun $y > -1$ und $x = \pi$.
Dann ist $\cos x = -1 < y$, also $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$.
Somit ist $\inf M = -1$ und M besitzt kein Minimum, Maximum, Supremum.

(d) Es ist $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6) \leq 0 \iff$
$\big(x + 4 \leq 0 \text{ und } x + 6 \geq 0\big)$ oder $\big(x + 4 \geq 0 \text{ und } x + 6 \leq 0\big)$.
1. Fall: $x + 4 \leq 0$ und $x + 6 \geq 0 \iff -6 \leq x \leq -4$.
2. Fall: $x + 4 \geq 0$ und $x + 6 \leq 0 \iff -4 \leq x \leq -6$;
(diese Ungleichung ist durch kein x erfüllt).
Also $M = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -4\}$ und somit
$-6 = \inf M = \min M$ und $-4 = \sup M = \max M$.

(e) Sei $y > -2$, also $y = -2 + z$ für ein $z > 0$.
Dann gibt es ein $x > -1$, z.B. $x = -1 + \frac{z}{4}$, so daß $y > 2x = -2 + \frac{z}{2}$.
Folglich ist $(x, y) \in A$ und somit $y \in M$.
Ist $y \leq -2$ und $x > -1$ beliebig, dann gilt stets: $y \leq -2 < 2x$, also $(x, y) \notin A$ und somit $y \notin M$. Damit ist $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -2\}$ und $\inf M = -2$.
Offenbar besitzt M kein Supremum, kein Minimum und kein Maximum.