

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.2 Reelle Zahlen

2.15 Zu folgenden Mengen gebe man (im Falle der Existenz) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an! 12/2/15/1

- (a) $M = \{x : \sin x = 0\}$,
- (b) $M = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 < \cos 0\}$,
- (c) $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } \cos x < y\}$,
- (d) $M = \{x : x^2 + 10x + 24 \leq 0\}$,
- (e) $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A\}$, wobei
 $A = \{(x, y) : x > -1 \text{ und } y > 2x\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.15 Es seien M_a, \dots, M_e die unter (a) - (e) angegebenen Mengen. 12/2/15/2

- (a) M_a besitzt kein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.
- (b) $\inf M_b = -1$, $\sup M_b = 1$, $\min M_b$ und $\max M_b$ existieren nicht.
- (c) $\inf M_c = -1$ Minimum, Maximum, Supremum von M_c existieren nicht.
- (d) $\inf M_d = -6 = \min M_d$, $\sup M_d = -4 = \max M_d$.
- (e) $\inf M_e = -2$, M_e besitzt kein Minimum, Maximum, Supremum.

Lösung zu Aufgabe 2.15

12/2/15/3

- (a) Offenbar ist $M = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; folglich besitzt M kein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.
- (b) Es ist $x^2 < \cos 0 = 1 \iff |x| < 1$; also $M = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$. Folglich ist $\inf M = -1$ und $\sup M = 1$; M besitzt kein Minimum und kein Maximum.
- (c) Für $y \leq -1$ existiert kein x mit $\cos x < y \leq -1$.
 Sei nun $y > -1$ und $x = \pi$.
 Dann ist $\cos x = -1 < y$, also $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$.
 Somit ist $\inf M = -1$ und M besitzt kein Minimum, Maximum, Supremum.
- (d) Es ist $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6) \leq 0 \iff$
 $(x + 4 \leq 0 \text{ und } x + 6 \geq 0)$ oder $(x + 4 \geq 0 \text{ und } x + 6 \leq 0)$.
 1. Fall: $x + 4 \leq 0$ und $x + 6 \geq 0 \iff -6 \leq x \leq -4$.
 2. Fall: $x + 4 \geq 0$ und $x + 6 \leq 0 \iff -4 \leq x \leq -6$;
 (diese Ungleichung ist durch kein x erfüllt).
 Also $M = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -4\}$ und somit
 $-6 = \inf M = \min M$ und $-4 = \sup M = \max M$.

(e) Sei $y > -2$, also $y = -2 + z$ für ein $z > 0$.

Dann gibt es ein $x > -1$, z.B. $x = -1 + \frac{z}{4}$, so daß $y > 2x = -2 + \frac{z}{2}$.

Folglich ist $(x, y) \in A$ und somit $y \in M$.

Ist $y \leq -2$ und $x > -1$ beliebig, dann gilt stets: $y \leq -2 < 2x$, also $(x, y) \notin A$ und somit $y \notin M$. Damit ist $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -2\}$ und $\inf M = -2$.

Offenbar besitzt M kein Supremum, kein Minimum und kein Maximum.