Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.4 Zeigen Sie: Wenn $a_n \geq 0$ und $a_n \to a$, so $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$. **12/3/4/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.4 1. Fall: $a = 0$; leicht zu verifizieren. **12/3/4/2**
2. Fall: $a \neq 0$, also $a > 0$. Man benutze:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}.$$

Lösung zu Aufgabe 3.4 Es sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ für fast alle n. **12/3/4/3**
1. Fall: $a = 0$; dann ist $|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = |a_n| < \varepsilon^2$ für fast alle n und somit $|\sqrt{a_n}| < \varepsilon$ für fast alle n, also $\lim \sqrt{a_n} = 0 = \sqrt{a}$.
2. Fall: $a \neq 0$, also $a > 0$ und somit $\sqrt{a} > 0$. Dann ist

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

für fast alle n. Folglich ist $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.