Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.5 Zeigen Sie: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1,$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$ **12/3/5/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.5 (a) Offenbar ist $\sqrt[n]{5} \geq 1$. Für $\varepsilon > 0$ ist $\sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n. **12/3/5/2**

(b) Offenbar ist $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Für $\varepsilon > 0$ ist $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.

Lösung zu Aufgabe 3.5 Für beliebiges $k > 1$ ist $\sqrt[n]{k} > 1$, denn $\sqrt[n]{k} > 1 \iff k > 1^n = 1$, und dies gilt für alle $n \geq 1$. **12/3/5/3**

(a) Es genügt zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{5} - 1 \geq \varepsilon$ für unendlich viele n.
Dann ist $5 \geq (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$ für unendlich viele n, ↯! Also $\lim \sqrt[n]{5} = 1$.

(b) Es genügt zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{n} - 1 \geq \varepsilon^2$ für unendlich viele n.
Dann ist $n \geq (1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2$ (nach dem binomischen Satz; vgl. Aufgabe 2.14),
also $1 \geq \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2$ und somit $\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \geq n$ für unendlich viele n, ↯!
Also $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.