

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.6 Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen (a_n) von reellen Zahlen sind die nachfolgenden Bedingungen äquivalent: 12/3/6/1

- (a) (a_n) ist konvergent,
- (b) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt,
- (c) $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.6 Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen: Konvergenz, Häufungspunkt, Limes Superior, Limes Inferior. 12/3/6/2

Lösung zu Aufgabe 3.6 (a) $\iff (a_n)$ konvergiert gegen a 12/3/6/3

\iff für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle n (d.h. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$)

\iff für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder von (a_n) in $U_\varepsilon(a)$

$\iff a$ ist einziger Häufungspunkt von (a_n)

\iff (b).

(b) $\iff a$ ist einziger Häufungspunkt von (a_n)

$\iff a$ ist zugleich größter und kleinster Häufungspunkt von (a_n)

$\iff \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$

\iff (c).