

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.3 Folgen von reellen Zahlen

**3.7** Zeigen Sie, daß die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  streng monoton fällt. 12/3/7/1

**Lösungshinweis zu Aufgabe 3.7** Man zeige  $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$  für alle  $n$  und benutze dabei 12/3/7/2  
die Bernoullische Ungleichung.

**Lösung zu Aufgabe 3.7** Wir zeigen  $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$  für alle  $n$ . 12/3/7/3

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n(n+2) + n+1}{n(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1.\end{aligned}$$