Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.8 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte der Folgen **12/3/8/1**

(a) $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$, (c) $\left(\frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1}\right)$, (e) $\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}\right)$,

(b) $\left(\frac{n!}{k^n}\right)$, $k \geq 1$, (d) $\left(\frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}}\right)$, (f) $\left(\sqrt[n]{2n}\right)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.8 (a) $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$. **12/3/8/2**

(b) $\lim \frac{n!}{k^n} = \infty$.

(c) $\lim \frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1} = \frac{4}{7}$.

(d) $\lim \frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}} = \infty$.

(e) $\lim (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2} = 0$.

(f) $\lim \sqrt[n]{2n} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3.8 **12/3/8/3**

(a) Wir zeigen: $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

Offenbar ist $\frac{2^n}{n!} > 0$. Weiterhin gilt für $n \geq 4$:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2^4}{4!} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdots \frac{2}{n} < \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{n} < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Folglich gilt die Behauptung.

(b) Wir zeigen: $\lim \frac{n!}{k^n} = \infty$ für $k \geq 1$.

Es sei $n > k$ und $\frac{k!}{k^k} := c$. Dann ist $\frac{k+1}{k} \cdots \frac{n-1}{k} \geq 1$ und somit

$$\frac{n!}{k^n} = \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{k+1}{k} \cdots \frac{n-1}{k} \cdot \frac{n}{k} \geq \frac{c}{k} \cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich gilt die Behauptung.

(c) Es sei $a_n = \frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1}$. Wir zeigen $\lim a_n = \frac{4}{7}$.

Es ist $a_n = \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}}{7+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}$ und daher $\lim a_n = \frac{4}{7}$.

(d) Es sei $a_n = \frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}}$. Wir zeigen $\lim a_n = \infty$. Es ist

$$a_n > \frac{n^3}{3n^2+\sqrt{n^2-1}} > \frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

denn $\sqrt{n^2-1} < n^2$.

(e) Sei $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$. Wir zeigen: $\lim a_n = 0$. Es ist

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

also $\lim a_n = 0$.

(f) Es ist $\sqrt[n]{2n} > 1$, denn $2n > 1$. Es genügt zu zeigen:
Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{2n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{2n} - 1 \geq \varepsilon$, also

$$2n \geq (1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 \quad \text{für unendlich viele } n$$

(hier wurde der binomische Satz benutzt).
Dann ist $2 \geq \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2$ und somit $\frac{4}{\varepsilon^2} + 1 \geq n$ für unendlich viele n, ↯!
Also $\lim \sqrt[n]{2n} = 1$.