Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.10 Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n), $n \geq 1$, beschränkt sind: **12/3/10/1**

(a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$ (n Wurzeln),

(b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n+1}$,

(c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n = 2k, \\ \frac{n^2}{n+2} & \text{für } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.10 (a) Induktiv zeigt man: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ und $0 \leq a_n \leq 2$. **12/3/10/2**

(a_n) ist also nach oben beschränkt.

(b) $a_n \geq \sqrt{n+1}$, und somit ist (a_n) nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

(c) (a_n) ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

Lösung zu Aufgabe 3.10 **12/3/10/3**

(a) Offenbar ist $a_n \geq 1$, folglich ist (a_n) nach unten beschränkt.
Wir zeigen: $a_n \leq 2$ für alle n.
Nach Definition von a_n ist $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
Induktiv beweist man sehr leicht, daß mit $a_n \leq 2$ auch $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq 2$ ist.
Damit ist (a_n) auch nach oben beschränkt.

(b) Für $n \geq 4$ ist

$$a_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}(\sqrt{n} - 1) \geq \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Folglich ist (a_n) nicht nach oben beschränkt.
Wegen $a_n \geq \sqrt{n+1} \geq 1$ ist (a_n) jedoch nach unten beschränkt.

(c) Für gerade n ist $0 \leq \frac{1}{n} < 1$; für ungerade $n \geq 3$ ist

$$0 \leq a_n = \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Folglich ist (a_n) nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.