Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.11 Prüfen Sie, ob die Folgen $(a_n),\ n \geq 1,$ monoton sind: **12/3/11/1**

(a) $a_n = \dfrac{n^2+2n+7}{n^2+2n+8}$,

(b) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}$,

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$,

(d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} & \text{für} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} & \text{für} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.11 (a) (a_n) ist streng monoton wachsend. **12/3/11/2**

(b) (a_n) ist streng monoton fallend.

(c) (a_n) ist alternierend und daher nicht monoton.

(d) (a_n) ist nicht monoton, denn $a_n > a_{n+1} < a_{n+2}$.

Lösung zu Aufgabe 3.11 **12/3/11/3**

(a) (a_n) ist streng monoton wachsend, denn

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff (n^2+2n+7)\big((n+1)^2+2(n+1)+8\big) < (n^2+2n+8)\big((n+1)^2+2(n+1)+7\big) \\ &\iff 0 < 2n+3; \ \text{ und dies gilt.} \end{aligned}$$

(b) (a_n) ist streng monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff (n+2)^{\frac{1}{3}} - (n+1)^{\frac{1}{2}} < (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}} \\ &\iff (n+2)^{\frac{2}{6}} - (n+1)^{\frac{3}{6}} < (n+1)^{\frac{2}{6}} - n^{\frac{3}{6}} \\ &\iff (n+2)^{\frac{2}{6}} - (n+1)^{\frac{2}{6}} < (n+1)^{\frac{3}{6}} - n^{\frac{3}{6}} \\ &\iff (n+1)^{\frac{2}{6}} \cdot \left(\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{2}{6}} - 1 \right) < n^{\frac{3}{6}} \cdot \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{3}{6}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung wird abkürzend mit $(\star)$ bezeichnet.
Für $n < 3$ gilt offenbar $a_{n+1} < a_n$.
Weiterhin ist $0 < (n+1)^{\frac{2}{6}} < n^{\frac{3}{6}}$ für alle $n \geq 3$, denn

$$(n+1)^{\frac{2}{6}} < n^{\frac{3}{6}} \iff (n+1)^2 < n^3. \quad \text{(Diese Ungleichung gilt für } n \geq 3.)$$

Um die Ungleichung $(\star)$ nachzuweisen, bleibt noch zu zeigen, daß auch

$$(\star\star) \ : \ \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{2}{6}} - 1 < \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{3}{6}} - 1 \ \text{ gilt.} \quad \text{(Beide Seiten von } (\star\star) \text{ sind positiv!)}$$

Es ist

$$\begin{aligned} (\star\star) &\iff \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 < \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \iff (n+2)^2 \cdot n^3 < (n+1)^5 \\ &\iff n^5 + 4n^4 + 4n^3 < \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} n^{5-i}; \ \text{ und diese Ungleichung ist richtig.} \end{aligned}$$

Folglich gilt auch $(\star)$ und somit die Ausgangsungleichung.

(c) Für $n \geq 2$ ist $n < n^2$, also auch $\sqrt{n} < n$ und somit $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$;
folglich ist $-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.
Hieraus folgt: (a_n) ist alternierend und daher nicht monoton.

(d) Wir zeigen: (a_n) ist nicht monoton. Dazu weisen wir nach, daß
$a_n > a_{n+1} < a_{n+2}$.
Es sei $n = 2k - 1$, also n ungerade. Dann gilt:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{2k} - 1} > \frac{1}{\sqrt{2k+1} + 1} \iff \sqrt{2k} - 1 < \sqrt{2k+1} + 1;$$

und die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig.
Also $a_n > a_{n+1}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_{n+2} &\iff \frac{1}{\sqrt{2k+1}+1} < \frac{1}{\sqrt{2k+2}-1} \iff \sqrt{2k+1} + 1 > \sqrt{2k+2} - 1 \\ &\iff \sqrt{2k+1} + 2 > \sqrt{2k+2} \iff 2k + 1 + 4\sqrt{2k+1} + 4 > 2k + 2 \\ &\iff 4\sqrt{2k+1} + 3 > 0. \end{aligned}$$

Also $a_{n+1} < a_{n+2}$.