Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.16 Man finde die Grenzwerte von (a_n) und (b_n), wobei a_n und b_n durch die folgenden Rekursionen definiert sind: **12/3/16/1**

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \qquad b_1 = \tfrac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.16 (a) Induktiv zeigt man: $a_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$; also $\lim a_n = 1$. **12/3/16/2**

(b) Induktiv zeigt man: $b_n = \dfrac{n}{n+1}$; also $\lim b_n = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3.16 **12/3/16/3**

(a) Wir behaupten: $a_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Dies wird induktiv über n bewiesen.

Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$.

Für n gelte die Behauptung bereits. Es ist

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2} = \frac{\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} + 1}{2} = \frac{2^{n-1} + 1 + 2^{n-1}}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2^n + 1}{2^n}.$$

Folglich ist $\lim a_n = 1 + \lim \frac{1}{2^n} = 1$.

(b) Wir behaupten: $b_n = \dfrac{n}{n+1}$. Dies wird induktiv über n gezeigt.

Für $n = 1$ ist $b_n = \frac{1}{2}$.

Für n gelte die Behauptung bereits. Es ist

$$b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n + 2 - n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Folglich ist $\lim b_n = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1$.