Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.17 Zeigen Sie: **12/3/17/1**

(a) Die Folge (a_n) mit den induktiv definierten Folgegliedern

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \qquad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist (a_n) induktiv definiert durch

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \qquad \text{für } n \geq 3,$$

dann besitzt die Folge (a_n) den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

[Hinweis: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geq 1$.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.17 (a) Induktiv zeigt man: **12/3/17/2**

Wenn $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ und $n \in \{4k + i : i = 0, \ldots, 3\}$, so $|a_n| \leq \frac{1}{2^k}$.

Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Induktiv zeigt man: $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ (für $n \geq 2$); damit ist $\lim a_n = \frac{2}{3}$.