# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.3 Folgen von reellen Zahlen

**3.17** Zeigen Sie: **12/3/17/1**

(a) Die Folge $(a_n)$ mit den induktiv definierten Folgegliedern

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist $(a_n)$ induktiv definiert durch

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3,$$

dann besitzt die Folge $(a_n)$ den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

[Hinweis: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geq 1$.]

**Lösungshinweis zu Aufgabe 3.17** (a) Induktiv zeigt man: **12/3/17/2**

Wenn $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ und $n \in \{4k + i : i = 0, \ldots, 3\}$, so $|a_n| \leq \frac{1}{2^k}$.
Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Induktiv zeigt man: $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ (für $n \geq 2$); damit ist $\lim a_n = \frac{2}{3}$.

**Lösung zu Aufgabe 3.17** **12/3/17/3**

(a) Die Gestalt des $n$-ten Folgegliedes ist nicht offensichtlich. Daher wird eine Abschätzung der Folgeglieder vorgenommen; insbesondere weisen wir nach, daß $(a_n)$ eine Nullfolge bildet. Dazu beweisen wir die folgende Behauptung:

*Wenn* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *und* $n \in \{4k + i : i = 0, \ldots, 3\}$, *so ist* $|a_n| \leq \frac{1}{2^k}$.

Für beliebiges $n \geq 2$ gilt: $|a_{n+4}| = -\frac{1}{8}(a_{n+1} - a_{n-1}),$ $\quad (\star)$

denn nach Definition der Folgeglieder ist

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= \frac{1}{2}(a_{n+3} - a_{n+2}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+2}\Big) \\ &= -\frac{1}{4}(a_{n+2} + a_{n+1}) \\ &= -\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})\Big) \\ &= -\frac{1}{8}(a_{n+1} - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $(\star)$ wird jetzt die obige Behauptung induktiv über $k$ bewiesen.

Es sei $k = 1$. (Zu zeigen ist: $|a_{4+i}| \leq \frac{1}{2}$ für $i = 0, \ldots, 3$.)

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \frac{1}{2};$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 - a_2) = -\frac{1}{4}; \qquad a_5 = \frac{1}{2}(a_4 - a_3) = -\frac{3}{8};$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 - a_4) = -\frac{1}{16}; \qquad a_7 = \frac{1}{2}(a_6 - a_5) = \frac{5}{32};$$

Also $|a_{4+i}| \leq \frac{1}{2^1}$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Induktionsvoraussetzung für $k$:

Wenn $1 \leq m \leq k$ und $n \in \{4m + i : i = 0, \ldots, 3\}$, so gilt: $|a_n| \leq \frac{1}{2^m}$.

Wir zeigen die Behauptung für $k + 1$. Sei $n \in \{4(k+1) + i : i = 0, \ldots, 3\}$.

1. Fall: $n = 4k + 4$.

Nach $(\star)$ und der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} |a_n| = |a_{4k+4}| &\leq \frac{1}{8}(|a_{4k+1}| + |a_{4k-1}|) \\ &\leq \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}\Big) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

2. Fall: $n = 4k + 4 + i$, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt analog wie im ersten Fall:

$$\begin{aligned} |a_n| = |a_{4k+4+1}| &\leq \frac{1}{8}(|a_{4k+1+i}| + |a_{4k-1+i}|) \\ &\leq \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\Big) \quad (\text{denn } 4k - 1 + i \geq 4k) \\ &= \frac{1}{2^{k+2}} \leq \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(a_n)$ eine Nullfolge.

(Hieraus folgt bereits, daß $(a_n)$ eine Cauchyfolge ist, wenn man den Satz zur Verfügung hat, daß konvergente Folgen stets Cauchyfolgen sind.)

Wir zeigen die „Cauchy-Eigenschaft" mit Hilfe der Definition.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Weiterhin sei $n_0 := 2^k$ und $n \geq n_0$ beliebig. Dann gilt offenbar:

$$|a_n - a_{n_0}| \leq |a_n| + |a_{n_0}| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

(b) Dem Hinweis entsprechend zeigen wir induktiv über $n$ $(n \geq 2)$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}.$$

Sei $n = 2$; dann ist $\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1 = a_2$.

Für ein $n \geq 2$ gelte die Behauptung bereits; wir zeigen sie für $n + 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3}\Big) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3}\Big(\frac{-1}{2} + 1\Big) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(a_n - \frac{2}{3})$ eine Nullfolge, also $a_n \to \frac{2}{3}$.