

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.1 Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt: 12/4/1/1

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Lösung zu Aufgabe 4.1 Der Beweis erfolgt induktiv über n . 12/4/1/3

Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

Für n gelte die Formel bereits; wir beweisen sie für $n + 1$.

Es ist

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\ &= \binom{n}{0} a b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{n} a^{n+1} + \\ &\quad \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{1} a b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^n b \\ &= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) a b^n + \dots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}, \quad \text{denn} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$