Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.1 Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt: **12/4/1/1**

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.1 Den Beweis führt man leicht induktiv über n. **12/4/1/2**

Lösung zu Aufgabe 4.1 Der Beweis erfolgt induktiv über n. **12/4/1/3**

Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

Für n gelte die Formel bereits; wir beweisen sie für $n+1$.

Es ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} \\
&= \qquad \binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^n b + \binom{n}{n}a^{n+1} + \\
&\quad \binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}a^n b \\
&= \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)ab^n + \ldots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)a^n b + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}, \quad \text{denn} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{k+1}{k}.
\end{aligned}$$