Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.3 Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i} = 2^{2n}.$ **12/4/3/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.3 Man benutze die Ergebnisse von Aufgabe 4.2 . **12/4/3/2**

Lösung zu Aufgabe 4.3 Es ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$ und $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i} = 0$ (vgl. Aufgabe 4.2). **12/4/3/3**

Folglich gilt nach dem binomischen Satz:

$$\begin{aligned}
(1+1)^{2n} + (-1+1)^{2n} &= 2^{2n} + 0 = 2^{2n}\\
&= \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i} + \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}\\
&= \sum_{i=0}^{2n}\Big(1+(-1)^n\Big)\binom{2n}{i}\\
&= \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{2j}. \qquad \text{(für ungerade } i \text{ ist } 1+(-1)^i = 0)
\end{aligned}$$

Also $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{2i} = 2^{2n}.$