Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.5 Ermitteln Sie die n-te Partialsumme und den Grenzwert der Reihe **12/4/5/1**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

[Hinweis: Man ermittle Zahlen a, b, c, so daß gilt: $\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+1} + \frac{c}{i+2}$.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.5 Es ist $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2}$. Die n-te Partialsumme S_n ist gegeben durch $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. Hieraus erhält man $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$. **12/4/5/2**

Lösung zu Aufgabe 4.5 Entsprechend des Hinweises erhält man die Gleichung: **12/4/5/3**

$$1 = a(i^2 + 3i + 2) + b(i^2 + 2i) + c(i^2 + i) = (a + b + c)\cdot i^2 + (3a + 2b + c)\cdot i + 2a,$$

die für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 1$ gelten soll. Hieraus entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 3a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 2a & & & & & = & 1 \end{array}$$

dessen Lösung $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2}$ ergibt. (Probe!)

Folglich gilt für die n-te Partialsumme S_n der Reihe:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i+1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Also $\quad S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$

Folglich gilt: $\quad \lim S_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}.$