Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.6 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. **12/4/6/1**

Beweisen Sie, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ konvergiert.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.6 Für $|a_n| \leq c,\ n \in \mathbb{N},$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c}{2^n}$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$. **12/4/6/2**

Lösung zu Aufgabe 4.6 Nach dem Majorantenkriterium gilt: Sind (b_n), (c_n) Folgen und ist $|b_n| \leq |c_n|$ für fast alle n und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergent, dann ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ konvergent und somit ebenfalls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. **12/4/6/3**

Aufgrund der Voraussetzung ist (a_n) beschränkt, also $|a_n| \leq c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $|a_n 2^{-n}| \leq \frac{c}{2^n}$. Die m-te Partialsumme S_m von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ist $S_m = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^m}$ (vgl. Aufgabe 1.16) und somit ist

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{c}{2^n} = c \cdot S_m = 2c - \frac{c}{2^m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2c.$$

Folglich ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ konvergent.