# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.4 Unendliche Reihen

**4.7** Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen: **12/4/7/1**

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ mit $a > 1$,

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k \cdot a^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < a < 1$.

**Lösung zu Aufgabe 4.7** **12/4/7/3**

(a) Wir benutzen das Quotientenkriterium.
Es sei $\frac{2^n n!}{n^n} := a_n$; dann gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = 2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\mathrm{e}} < 1.$$

Folglich ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

(b) Es sei $\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} := b_n$.
Wegen $a > 1$ gibt es ein $c > 0$, so daß $a = c + 1$. Mit Hilfe des binomischen Satzes erhält man schließlich:

$$\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{a^n}{n+1} = \frac{(c+1)^n}{n+1} \geq \frac{n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{c^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist $(b_n)$ nicht beschränkt, also keine Nullfolge und daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht konvergent.

(c) Es sei $\frac{2n^2}{(n+1)3^n} := c_n$ und $q := \frac{3}{4}$. Für alle $n \geq 2$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \frac{2(n+1)^2 \cdot (n+1) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{3(n+2)n^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \leq \frac{3}{4} = q < 1.\end{aligned}$$

Somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.

(d) Wir benutzen abermals das Quotientenkriterium.
Es sei $n^k a^n := d_n$. Dann gilt:

$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{(n+1)^k \cdot a^{n+1}}{n^k \cdot a^n} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k \cdot a := (\star).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$ gilt auch $\lim\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k = \Big(\lim(1+\frac{1}{n})\Big)^k = 1.$

Folglich ist $\lim\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \lim(\star) = a < 1$ und somit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergent.