

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.7 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

12/4/7/1

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ mit $a > 1$,
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot a^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < a < 1$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.7 Es seien a_n, \dots, d_n die jeweils n -ten Summanden der Reihen (a) - (d). 12/4/7/2

- (a) Es ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \rightarrow \frac{2}{e} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum a_n$ absolut konvergent.
 (b) Für $a := 1 + c$ und $c > 0$ ist $b_n \geq \frac{n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{c^2}{2} \rightarrow \infty$. Die Folge (b_n) ist nicht beschränkt und $\sum b_n$ nicht konvergent.
 (c) $|\frac{c_{n+1}}{c_n}| \leq \frac{3}{4}$ für $n \geq 2$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum c_n$ absolut konvergent.
 (d) $|\frac{d_{n+1}}{d_n}| \leq a < 1$; folglich ist $\sum d_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.7

12/4/7/3

- (a) Wir benutzen das Quotientenkriterium.

Es sei $\frac{2^n n!}{n^n} := a_n$; dann gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1.$$

Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

- (b) Es sei $\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} := b_n$.

Wegen $a > 1$ gibt es ein $c > 0$, so daß $a = c + 1$. Mit Hilfe des binomischen Satzes erhält man schließlich:

$$\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{a^n}{n+1} = \frac{(c+1)^n}{n+1} \geq \frac{n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{c^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Folglich ist (b_n) nicht beschränkt, also keine Nullfolge und daher $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht konvergent.

(c) Es sei $\frac{2n^2}{(n+1)3^n} := c_n$ und $q := \frac{3}{4}$. Für alle $n \geq 2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \frac{2(n+1)^2 \cdot (n+1) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{3(n+2)n^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \leq \frac{3}{4} = q < 1. \end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.

(d) Wir benutzen abermals das Quotientenkriterium.

Es sei $n^k a^n := d_n$. Dann gilt:

$$\left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| = \frac{(n+1)^k \cdot a^{n+1}}{n^k \cdot a^n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot a := (\star).$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$ gilt auch $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^k = 1$.

Folglich ist $\lim \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| = \lim(\star) = a < 1$ und somit $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergent.