Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.8 Zeigen Sie, daß **12/4/8/1**

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$; [Hinweis: $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$].

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$; [Hinweis: $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$].

Lösung zu Aufgabe 4.8 **12/4/8/3**

(a) Es sei $a_n := \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Dann ist $a_n = \frac{1}{2}\cdot \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$ und somit ist die n-te Partialsumme S_n von $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\Big(\Big(1-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)+\ldots+\Big(\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i+3}\Big)+\Big(\frac{1}{2i+3}-\frac{1}{2i+5}\Big) \\ &\qquad\qquad +\ldots+\Big(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\Big(1-\frac{1}{2n+3}\Big) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich gilt: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

(b) Induktiv über n zeigt man, daß die n-te Partialsumme S_n von $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i}$ durch $S_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$ dargestellt wird.

Für $n=1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4\cdot 3^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{3^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{3^i} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4\cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\Big| -\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}\Big| = \frac{2n+3}{4\cdot 3^n} \le \frac{n+1}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Folglich gilt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

(c) Induktiv über n zeigt man, daß die n-te Partialsumme S_n von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i}$ durch $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ gegeben ist.

Für $n = 1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{2^i} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 3 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\Big| - \frac{2n+3}{2^n} \Big| \leq \frac{2(n+2)}{2^n} = \frac{n+2}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Folglich gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 3.$