

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.4 Unendliche Reihen

4.8 Zeigen Sie, daß

12/4/8/1

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2},$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4};$ [Hinweis: $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$].
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3;$ [Hinweis: $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$].

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.8 Es seien a_n, b_n, c_n die jeweils n -ten Summanden der Reihen (a) - (c). 12/4/8/2

- (a) Es ist $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ und die n -te Partialsumme $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)}$, also $\sum a_n = \frac{1}{2}.$
 (b) Für $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ (induktiv zu beweisen) gilt offenbar: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} = \frac{3}{4}.$
 (c) Für $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ (induktiv zu beweisen) gilt offenbar: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i} = 3.$

Lösung zu Aufgabe 4.8

12/4/8/3

- (a) Es sei $a_n := \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Dann ist $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ und somit ist die n -te Partialsumme S_n von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3}\right) + \left(\frac{1}{2i+3} - \frac{1}{2i+5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$

- (b) Induktiv über n zeigt man, daß die n -te Partialsumme S_n von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i}$ durch

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$$

dargestellt wird. Für $n = 1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{3^i} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{3^i} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left| -\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \right| = \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \leq \frac{n+1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}.$

- (c) Induktiv über n zeigt man, daß die n -te Partialsumme S_n von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i}$ durch $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ gegeben ist.

Für $n = 1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2^i} = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2^i} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 3 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left| -\frac{2n+3}{2^n} \right| \leq \frac{2(n+2)}{2^n} = \frac{n+2}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$